Шестнадцатая олимпиада Эйлера для учителей математики Санкт-Петербурга, Ленинградской области и Северо-западного региона (заочный тур: 01.01.2022 – 10.04.2022)

Уважаемые коллеги!

Вам предлагаются два блока заданий:

№ 1 — № 7. «Математический блок» (задачи для решения).

№ 8 — № 12. «Методический блок» (задания, моделирующие работу учителя).

Среди предложенных заданий есть и достаточно трудные; присылайте Ваши решения, даже если Вам не удалось выполнить некоторые из этих заданий. Единственное условие — в работе должно быть представлено хотя бы одно верно выполненное задание из каждого блока.

Желаем успеха! ***Жюри конкурса***

I. Математический блок

1. Известно, что величины α и β двух острых углов треугольника *ABC* удовлетворяют условию $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)$. Докажите, что *ABC* — прямоугольный треугольник.

2. Ребра *AB* и *CD* тетраэдра *ABCD* равны, а остальные ребра больше их в два раза. Все вершины тетраэдра лежат на боковой поверхности цилиндра радиуса 3, причем ребро *AB* перпендикулярно плоскости основания цилиндра. Найдите длину этого ребра.

3. Решите неравенство $\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\frac{x+1}{4}<\sqrt{2x-1+\left(\frac{x+1}{4}\right)^2}$.

4. Найдите наибольшее значение выражения $y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{3+2y-2y^2}$.

5. Докажите неравенство $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)=2, \\ y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)=3. \end{cases}$

7. Докажите, что существует натуральное число n такое, что десятичная запись числа n^2 начинается с последовательности цифр 206167201111944.

II. Методический блок

Ниже приводятся условия и решения двух задач (№№ 8, 9). Оцените каждое из этих заданий и полученные результаты. Укажите имеющиеся на Ваш взгляд ошибки и недочеты и, если это возможно, доведите решение до верного ответа.

8. Задача. *На шахматном турнире каждый из участников должен был сыграть ровно одну партию с каждым из остальных участников, но два участника выбыли из турнира, сыграв только по 4 партии. Поэтому число партий, сыгранных в этом турнире, оказалось равным 62. Сколько изначально было участников турнира?*

Решение. *Пусть всего было* n *участников. Тогда* $(n-2)$ *из них (кроме 2-х выбывших) сыграли между собой* $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ *партий, а выбывшие сыграли еще 8. Итого, было сыграно* $\frac{(n-2)(n-3)}{2}+8$ *партий. Согласно условию, это количество равно 62, т.е.:* $\frac{(n-2)(n-3)}{2}+8=62$, $(n-2)(n-3)=108$. *Это уравнение не имеет натуральных решений, поскольку произведение двух последовательных натуральных чисел не может равняться* 108 $(9\cdot 10=90<108;\ 10\cdot 11=110>108)$.

Таким образом, условие задачи некорректно.

9. Задача. *Для каждого вещественного значения аргумента* x *значение функции* $f(x)$ *является корнем* t *уравнения* $t^2+4xt+x^2-x-1=0$. *Верно ли утверждение, что функция* $f(x)$ *имеет хотя бы один корень?*

Решение. *Согласно условию, для каждого вещественного значения* x *имеем*:

$$\text{либо } f(x)=-2x+\sqrt{3x^2+x+1}, \text{ либо } f(x)=-2x-\sqrt{3x^2+x+1}.$$

Функция $f(x)=-2x+\sqrt{3x^2+x+1}$ *непрерывна и на концах отрезка* $[0;2]$ *принимает значения разных знаков* $(f(0)=1>0, f(2)=\sqrt{15}-4<0)$, *значит, она имеет корень на этом отрезке.*

Функция $f(x)=-2x-\sqrt{3x^2+x+1}$ *непрерывна и на концах отрезка* $[-1;0]$ *принимает значения разных знаков* $(f(-1)=2-\sqrt{3}>0,\ f(0)=-1<0)$, *значит, она имеет корень на этом отрезке.*

Таким образом, функция $f(x)$ *в любом случае имеет корень.*

Решите предлагаемые ниже задачи (№№ 10, 11, 12) возможно большим числом способов (различными считаются способы, в которых используются различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого способа в школьном курсе математики.

10. Найдите наименьшее значение дроби $\frac{x^2-3x+3}{1-x}$, если $x<1$.

11. Положительные числа $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$ таковы, что выполняются условия $a_1^2+b_1^2=c_1^2,\ a_2^2+b_2^2=c_2^2$. Докажите, что $a_1a_2+b_1b_2\le c_1c_2$.

12. Положительные числа x, y и a связаны соотношением $ax^2+y^2=1$. Найдите такое значение a, при котором наибольшее значение выражения $x+ay$ принимает своё наименьшее значение.