**Восемнадцатая олимпиада Эйлера для учителей математики**
**Санкт-Петербурга, Ленинградской области и Северо-западного региона**
(заочный тур: 01.01.2024 – 13.04.2024)

## Уважаемые коллеги!

Вам предлагаются два блока заданий:

**№ 1 — № 7. «Математический блок»** (задачи для решения).

**№ 8 — № 12. «Методический блок»** (задания, моделирующие работу учителя).

Среди предложенных заданий есть и достаточно трудные; присылайте Ваши решения, даже если Вам не удалось выполнить некоторые из этих заданий. Единственное условие — в работе должно быть представлено хотя бы одно верно выполненное задание из каждого блока.

***Желаем успеха!*** ***Жюри конкурса***

## Математический блок

**1.** Найдите наибольшее значение отношения радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности в прямоугольном треугольнике.

**2.** Найдите все вещественные значения $x$, при которых угол между векторами

$$\vec{a}\{16x; x^2+64\} \text{ и } \vec{b}\{1-\sqrt{x-8}; -1\}$$

не превышает 90°.

**3**. Решите уравнение $\frac{x+1}{\sqrt{2x+3}} = \frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{2}$.

**4.** Решите уравнение $2x\sqrt{1-x^2} = 1 + x\sqrt{2} - 2x^2$.

**5.** Найдите все положительные значения $x$, удовлетворяющие условию

$$5[x^2] + 5[x] - x^2 - x = 2024.$$

**6.** Одна из граней тетраэдра $DABC$ — правильный треугольник $ABC$, длина стороны которого равна 2. Ребро $AD$ равно $\sqrt{2}$ и составляет со смежными рёбрами тетраэдра углы соответственно $\angle DAC = 45°$, $\angle DAB = 90°$. Плоскость $\alpha$ параллельна прямым $AD$ и $BC$, а плоскость $\beta$ — прямым $AC$ и $BD$. Найдите угол между плоскостями $\alpha$ и $\beta$.

**7.** Многочлен $P(x) = x^3 + x^2 + bx + a$ имеет три различных вещественных корня, которые являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

а) Могут ли все три корня быть целыми числами?

б) Могут ли все три корня быть рациональными числами?

## II. Методический блок

**Ниже приводятся условия и решения двух задач (№№ 8, 9). Оцените каждое из этих решений и полученные результаты. Укажите имеющиеся, на Ваш взгляд, ошибки и недочеты и, если они есть, приведите правильное решение этих задач.**

**8. Задача.** Решите уравнение $(x^2-2x)^3 = 2 + x\sqrt{x(x-2)^3}$.

**Решение.** На области определения данного уравнения имеем:

$(x^2-2x)^3 = 2 + x\sqrt{x(x-2)^3} \Leftrightarrow (x^2-2x)^3 - \sqrt{x^3(x-2)^3} - 2 = 0.$

Положив $\sqrt{(x^2-2x)^3} = t \geq 0$, получаем $t^2 - t - 2 = 0$, $t = 2$.

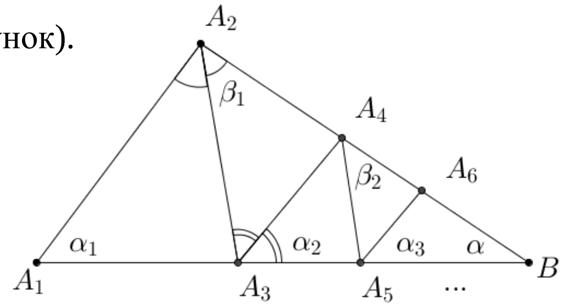
Таким образом, $\sqrt{(x^2-2x)^3} = 2$, $x^2 - 2x - \sqrt[3]{4} = 0$, $x = 1 \pm \sqrt{1+\sqrt[3]{4}}$.

**Ответ:** $\left\{1 \pm \sqrt{1+\sqrt[3]{4}}\right\}$.

**9. Задача.** В треугольнике $A_1A_2B$ с углом $B$ равным $\alpha$ провели биссектрису $A_2A_3$, затем в треугольнике $A_2A_3B$ провели биссектрису $A_3A_4$ и так далее в треугольнике $A_nA_{n+1}B$ провели биссектрису $A_{n+1}A_{n+2}$. Найдите предел последовательности $\alpha_n$ величин углов $A_{2n}A_{2n-1}B$, если он существует.

**Решение.**

Обозначим углы $A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1} = \beta_n$ (см. рисунок).



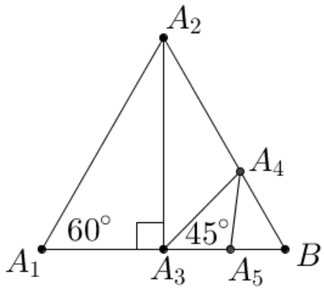

Далее находим:

1. Из треугольника $A_{2n-1}A_{2n}B$
$$\alpha_n = 180° - 2\beta_n - \alpha;$$
2. Из треугольника $A_{2n}A_{2n+1}B$
$$2\alpha_{n+1} = 180° - \beta_n - \alpha.$$

Исключая из последних двух равенств слагаемое $\beta_n$, получаем

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{4}(180° + \alpha_n - \alpha). \qquad (*)$$

Исследуем последовательность $\alpha_n$ на монотонность с помощью метода математической индукции. В качестве базы индукции рассмотрим равносторонний треугольник $A_1A_2B$. Для такого треугольника нетрудно вычислить несколько членов искомой последовательности: $\alpha_n = (60°; 45°; 41{,}25°; \dots)$.




Такая последовательность убывает. Для осуществления индукционного перехода убедимся, что для всех натуральных $n$ если $\alpha_{n+1} < \alpha_n$, то $\alpha_{n+2} < \alpha_{n+1}$. Ясно, что эти неравенства равносильны.

Действительно, $\alpha_{n+2} < \alpha_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{4}(180° + \alpha_{n+1} - \alpha) < \frac{1}{4}(180° + \alpha_n - \alpha) \Leftrightarrow \alpha_{n+1} < \alpha_n$.

Таким образом, последовательность $\alpha_n$ убывает и ограничена снизу, так как состоит из положительных чисел, значит, по теореме Вейерштрасса она имеет предел и этот предел совпадает с пределом ее подпоследовательности $\alpha_{n+1}$. Пусть этот предел равен $x$. Переходя к пределу в рекуррентном соотношении $(*)$, получаем

$$x = \frac{1}{4}(180° + x - \alpha) \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(180° - \alpha).$$

**Ответ:** $\frac{1}{3}(180° - \alpha)$.

**Решите предлагаемые ниже задачи (№№ 10, 11, 12) возможно большим числом способов (различными считаются способы, в которых используются различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого способа в школьном курсе математики.**

**10.** На доске записано число 2024. За один ход можно вычесть из записанного на доске числа или прибавить к нему сумму его цифр, причем результат всегда должен оставаться четырехзначным. После этого записать на доске полученное число вместо исходного и повторить процедуру. Можно ли через 35 таких шагов получить число 1000?

**11**. Найдите все такие значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $x^2 - 4x + (a+2)\sqrt{4x - x^2} + 3a - 1 = 0$ не имеет решений.

**12.** Докажите, что для любых положительных чисел $a$, $b$, $c$, $d$ справедливо неравенство

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{abcd}.$$