Семнадцатая олимпиада Эйлера для учителей математики
Санкт-Петербурга, Ленинградской области и Северо-западного региона
(заочный тур: 31.12.2022 – 10.04.2023)

Уважаемые коллеги!

Вам предлагаются два блока заданий:

№ 1 — № 7. «Математический блок» (задачи для решения).

№ 8 — № 12. «Методический блок» (задания, моделирующие работу учителя).

Среди предложенных заданий есть и достаточно трудные; присылайте Ваши решения, даже если Вам не удалось выполнить некоторые из этих заданий. Единственное условие — в работе должно быть представлено хотя бы одно верно выполненное задание из каждого блока.

Желаем успеха! ***Жюри конкурса***

Математический блок

1. К десятичному логарифму положительного числа x прибавляется расстояние от этого числа до 45. При каких x эта сумма равна 57?

2. Дана квадратичная функция $f(x) = x^2 - 8x + 5$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки пересечения графика этой функции с осями координат.

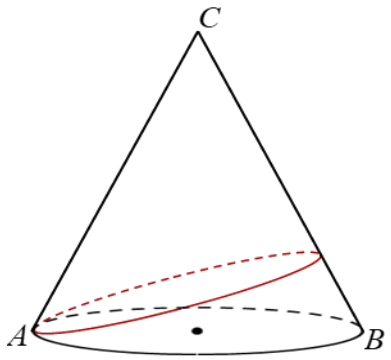
3. Решите уравнение $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 3x$.

4. Известно, что многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ имеет 4 различных вещественных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + 20x + 2023$ вещественных корней не имеет. Докажите, что $P(2023) > 10^8$.

5. Длины обеих диагоналей и сторона ромба, взятые в некотором порядке, образуют арифметическую прогрессию. Найдите отношение меньшей диагонали к большей.

6. Сфера касается всех ребер тетраэдра, два противоположных ребра которого равны a и b, а все остальные ребра равны между собой. Найдите радиус этой сферы.

7. Докажите, что существует хотя бы три прямых круговых конуса объема $\frac{\pi}{3}$, в которых образующие наклонены к основанию под углом большим $60°$, а длина кратчайшей петли на боковой поверхности конуса, проходящей через точку окружности его основания (см. рисунок), выражается целым числом.



II. Методический блок

Ниже приводятся условия и решения двух задач (№№ 8, 9). Оцените каждое из этих решений и полученные результаты. Укажите имеющиеся, на Ваш взгляд, ошибки и недочеты и, если возможно, приведите правильное решение этих задач.

8. Задача. *Бесконечная геометрическая прогрессия с положительными членами и знаменателем q такова, что каждый её член, начиная со второго, больше суммы всех предыдущих членов. Найдите все возможные значения q.*

«Решение». *Пусть $\{aq^{n-1}\}$ — геометрическая прогрессия, обладающая указанным в условии свойством. Тогда при любом $n \geq 2$ имеет место неравенство $q^n > \frac{q^n-1}{q-1}$. Поскольку, очевидно, $q > 1$, получаем $q^{n+1} - 2q^n + 1 > 0$ или $q^n(q-2) + 1 > 0$. Последнее неравенство при $q \geq 2$ верно для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Ответ: $[2; +\infty)$.

9. Задача. *Прямоугольник $ABCD$ и квадрат $AEFG$ расположены так, что точка E лежит на стороне CD, а точка F — на стороне BC (см. рисунок 1). Площадь квадрата $AEFG$ равна 1. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник $ABCD$?*

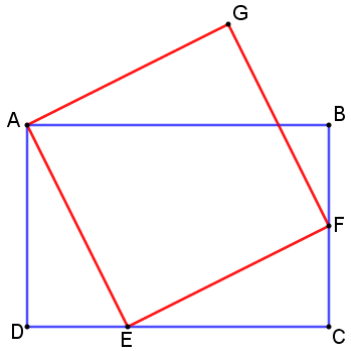


Рис.1

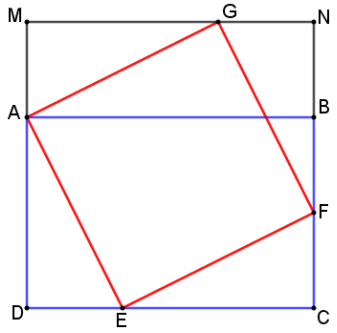


Рис.2

«Решение». *Проведем через точку G прямую, параллельную прямой CD и пересекающую прямые DA и CB в точках M и N соответственно (см. рисунок 2). Треугольники ADE, GMA, FNG, ECF равны по гипотенузе и острому углу, тогда $MNCD$ – квадрат. Заметим, что $AD^2 + DE^2 = AE^2 = 1$, $DC = EC + DE = AD + DE$, а согласно неравенству о средних $\frac{AD+DE}{2} \leq \sqrt{\frac{AD^2+DE^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

Таким образом, наибольшая площадь квадрата $MNCD$ достигается если $DC = \sqrt{2}$ и $AD = DE = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда наибольшая площадь прямоугольника $ABCD$ равна $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1$.

Ответ: 1.

10. Прокомментируйте приведённый ниже фрагмент урока, укажите имеющиеся, на Ваш взгляд, ошибки и недочеты.

Учитель предложил классу следующую задачу:

Докажите, что, если при некотором фиксированном $a \in \boldsymbol{R}$ и любом x из области определения функции $f(x)$ выполняется условие $f(x+a) = -\frac{1}{f(x)}$, то функция $f(x)$ — периодическая функция.

Лёня представил следующее доказательство:

Пусть функция $f(x)$ и число a удовлетворяют данному равенству и $x \in D(f)$. Тогда $f(x+a) = -\frac{1}{f(x)} \neq 0$, $f(x+2a) = -\frac{1}{f(x+a)} = f(x)$. Следовательно, $f(x)$ — периодическая функция, что и требовалось доказать.

Учитель похвалил Лёню, поставил ему в дневник оценку «5» и продолжил урок.

Решите предлагаемые ниже задачи (№№ 11, 12) возможно большим числом способов (различными считаются способы, в которых используются различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого способа в школьном курсе математики.

11. Точки A и B симметричны относительно центра некоторой окружности, а точка M — произвольная точка этой окружности. Докажите, что значение суммы $MA^2 + MB^2$ не зависит от выбора точки M.

12. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x^2 - y) = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.