Пятнадцатая олимпиада Эйлера для учителей математики Санкт-Петербурга и Ленинградской области
(заочный тур — 2021)

Уважаемые коллеги!

Вам предлагаются два блока заданий:

№ 1 — № 7. «Математический блок» (задачи для решения).

№ 8 — № 12. «Методический блок» (задания, моделирующие работу учителя).

Среди предложенных заданий есть и достаточно трудные; присылайте Ваши решения, даже если Вам не удалось выполнить некоторые из этих заданий. Единственное условие — в работе должно быть представлено хотя бы одно верно выполненное задание из каждого блока.

Желаем успеха! ***Жюри конкурса***

I. Математический блок

1. Решите неравенство $4 \cdot 9^{x+1} - 5^{4x} + 14 \cdot 5^{2x} \geq 49$.

2. Найдите все такие значения параметра a, для каждого из которых уравнение $64x^6 - (3x+a)^3 + 4x^2 - 3x = a$ имеет более одного корня.

3. Постройте график функции f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ такой, что он совмещается сам с собой при повороте на $\frac{\pi}{2}$ вокруг какой-то точки.

4. Рассматривается функция f (x) неубывающая на отрезке [0; 1] , такая, что $2f(x) = f(3x)$ и $f(1-x) = 1 - f(x)$. Найдите $f\left(\frac{1}{2021}\right)$.

5. Прямая $y = ax + b$ проходит через точку с рациональными координатами, не лежащую на оси абсцисс. Известно, что многочлен $(ax+b)^2$ имеет рациональные коэффициенты. Докажите, что эта прямая проходит через бесконечно много точек с рациональными координатами.

6. Симметричную монету подбросили n раз. Найдите вероятность того, что не встретились два последовательных броска, в которых наблюдался «орёл».

7. Сфера касается всех ребер тетраэдра, боковые ребра которого попарно перпендикулярны. Найдите радиус этой сферы, если радиус сферы, описанной вокруг данного тетраэдра, равен $3\sqrt{3}$.

II. Методический блок

Ниже приводятся решения двух задач (№№ 8, 9). Оцените каждое из этих решений и полученные результаты. Укажите все имеющиеся на Ваш взгляд ошибки и недочеты и, если возможно, доведите решение до верного ответа.

8. Задача. Задана последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_1 = 0,\ x_2 = 1$,

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}),\ n \geq 3.$$ Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$.

Ответ. $\frac{2}{3}$.

Решение. Сложив почленно равенства $2x_3 = x_2 + x_1,\ \ 2x_4 = x_3 + x_2, \dots$ $\dots,\ 2x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ и упростив полученный результат, получаем

$$2x_n + x_{n-1} = 2\ .$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \lim\limits_{x\to\infty} x_{n-1}$, переходя к пределу, находим $3\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 2$, откуда $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

9. Задача. Докажите, что если при некотором фиксированном значении $a \in \boldsymbol{R}$ и любом x из области определения функции $f(x)$ выполняется условие $f(x+a) = -\frac{1}{f(x)}$, то $f(x)$ — периодическая функция.

Решение. Пусть функция $f(x)$ и число a удовлетворяют условию задачи и $x \in D(f)$. Тогда $f(x+a) = -\frac{1}{f(x)} \neq 0;\ f(x+2a) = -\frac{1}{f(x+a)} = f(x)$.

Таким образом, функция $f(x)$ — периодическая функция с периодом $2a$, что и требовалось доказать.

Решите предлагаемые ниже задачи (№№ 10, 11, 12) возможно большим числом способов (различными считаются способы, в которых используются различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

10. Длины сторон AB и AC треугольника ABC равны 10 и 15. Докажите, что биссектриса AA_1 этого треугольника не больше 12.

11. Докажите, что для всех допустимых значений x выполняется неравенство $\cos(\arcsin x) + \sin(\arccos\sqrt{1-x^2}) \geq 1$.

12. Пусть a и b — положительные числа. Выясните при каких значениях x дробь $\frac{x^n}{ax^{2n}+b}$ принимает наибольшее значение.