Четырнадцатая олимпиада Эйлера
для учителей математики
Санкт-Петербурга и Ленинградской области
Второй (очный) тур — 22 ноября 2020 года

1. Найдите максимальную длину горизонтального отрезка с концами на графике функции $y = x^3 - x$.

2. Рассматривается функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. Вычислите $\underbrace{f(f(f(\dots f(20)\dots)}_{2020 \text{ раз}}$.

3. Диагонали выпуклого четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что проекции их точки пересечения на все четыре стороны четырёхугольника лежат на одной окружности.

4. Решите уравнение $2x^3 + (3\sqrt{3} + 2)x^2 + \sqrt{3}x - 9 = 0$.

5. Все грани тетраэдра — треугольники, длины сторон каждого из которых равны a, b и c. Найдите радиус шара, описанного вокруг данного тетраэдра.

6. Оцените приведенное ниже решение задачи. Укажите все ошибки и недочеты и, если они есть, приведите Ваше решение, доведённое до верного ответа.

Задача. *Найдите все натуральные числа, для каждого из которых произведение цифр, которыми они записаны, умноженное на сумму этих цифр равно 30.*

Решение. Пусть цифры исходного числа — x и y $(x \le y)$. Тогда, согласно условию, $(x + y)xy = 30$. С другой стороны, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Так как $x + y > x$ и $x + y > y$, то $x + y = 5$, $x = 2$, $y = 3$.

Ответ: 23 или 32.

7. Решите предлагаемую ниже задачу возможно большим числом способов (различными считаются способы, в которых используются различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных способов решения в школьном курсе математики.

Задача. *Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(n^3 + 5n)$ делится на 6.*

Желаем удачи! ***Жюри конкурса***