

**Тринадцатая олимпиада Эйлера для учителей математики  
Санкт-Петербурга и Ленинградской области  
Второй (очный) тур — 24 ноября 2019 года**

1. Найдите все целые решения неравенства  $x < \log_3(x^3 + 2)$ .
2. Решите уравнение  $x^3 - 8 = 16\sqrt[3]{x + 1}$ .
3. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  заданы длины трёх его рёбер:  $AB = 5$ ,  $AD = 12$ ,  $AA_1 = 8$ . Точка  $M$  на ребре  $AA_1$  такова, что  $AM = 5$ . Найдите объём пирамиды  $MB_1 C_1 D$ .
4. Двое играющих по очереди подбрасывают монету. Игра заканчивается, когда герб будет выброшен во второй раз. При этом выигрывает игрок, который выбросит второй герб. Ясно, что игрок, бросающий монету первым, на своем первом ходе выиграть не может, тогда как второй игрок может выиграть на своем первом ходе. Выясните, насколько чаще будет выигрывать второй игрок.
5. Двоичная запись числа  $n$  содержит  $k$  цифр,  $p$  из которых являются единицами. Докажите, что число  $x^n$  можно получить из числа  $x$ , произведя  $k + p - 2$  умножений.
6. Найдите ошибку в следующем рассуждении:

*Пусть  $P$  и  $Q$  произвольные утверждения. Перебрав всевозможные истинностные значения  $P$  и  $Q$ , убеждаемся в том, что утверждение  $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)^*$  истинно, независимо от истинностных значений  $P$  и  $Q$ . Отсюда вытекает, что для любых  $P$  и  $Q$  хотя бы одно из утверждений  $P \rightarrow Q$ ,  $Q \rightarrow P$  истинно.*

*Полученному выводу противоречит следующий пример: возьмём в качестве  $P$  утверждение « $n$  – простое число», а в качестве  $Q$  — « $n$  – нечётное число».*

7. Решите предлагаемую ниже задачу возможно большим числом способов (различными считаются способы, в которых используются различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

**Задача.** Постройте квадрат  $ABCD$  по его вершине  $A$  и двум точкам  $M$  и  $N$ , лежащим на прямых  $BC$  и  $CD$ .

---

\*) В этой записи « $\rightarrow$ » означает «влечёт», а « $\vee$ » означает союз «или».