Тринадцатая олимпиада Эйлера для учителей математики
(заочный тур — 2019)

Уважаемые коллеги!

Вам предлагаются два блока заданий:

№ 1 — № 7. «Математический блок» (задачи для решения).

№ 8 — № 12. «Методический блок» (задания, моделирующие работу учителя).

Среди предложенных заданий есть и достаточно трудные; присылайте Ваши решения, даже если Вам не удалось выполнить некоторые из этих заданий. Единственное условие — в работе должно быть представлено хотя бы одно верно выполненное задание из каждого блока.

Желаем успеха! ***Жюри конкурса***

I. Математический блок

1. В треугольнике ABC известны длины двух сторон: $AB=1$ и $AC=3$. Найдите все значения, которые может принимать:
   а) длина h высоты, опущенной из вершины A;
   б) длина m медианы, проведенной из вершины A;
   в) длина l биссектрисы, проведенной из вершины A.
   Обоснуйте Ваши ответы.

2. Найдите наибольшее значение выражения $y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{3+2y-y^2}$.

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^5+x^4-x^2-2x+1>0, \\ x^3+x^2+x-2>0, \\ x(x^2-1)(x^3-1)>0. \end{cases}$$

4. Докажите, что если $\{a_n\}$, где $n=0,1,2,\ldots$, — возрастающая арифметическая прогрессия, все члены которой положительны, то справедливы неравенства

$$\frac{n}{a_1a_{2n+1}}<\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}<\frac{n}{a_0a_{2n}}.$$

5. Куб с ребром 1 лежит по одну сторону от некоторой плоскости.

а) Докажите, что восемь чисел — расстояния от вершин данного куба до этой плоскости — можно разбить на две четверки (a,b,c,d) и (e,f,g,h) так, что:

$$a+b+c+d=e+f+g+h \text{ и } a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+g^2+h^2;$$

б) Найдите для того же разбиения соотношение между числами

$$a^3+b^3+c^3+d^3 \text{ и } e^3+f^3+g^3+h^3.$$

6. В городе девять остановок и несколько автобусных маршрутов. Любые два маршрута имеют не более одной общей остановки. На каждом автобусном маршруте ровно три остановки. Какое наибольшее число маршрутов может быть в городе?

7. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1=0$, $a_2=2$ и $a_{n+2}=a_na_{n+1}+$ $+a_n+a_{n+1}$ при всех натуральных значениях n. Найдите число членов этой последовательности, являющихся кубами натуральных чисел.

II. Методический блок

Укажите все имеющиеся в решениях двух приведённых ниже задач (№№ 8, 9) ошибки и недочеты и, если возможно, доведите решение до верного результата.

8. Задача. *Можно ли расставить на доске* 6×6 *шашки так, чтобы в каждой строке было поровну шашек, а в каждом столбце – разное количество?*

Ответ: Нет, нельзя.

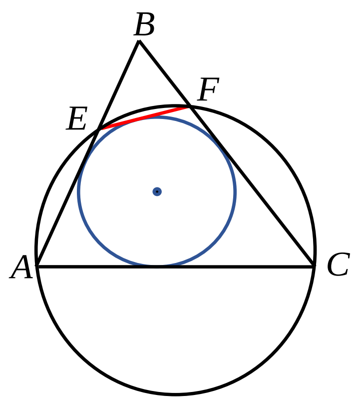
Доказательство.

Раз по столбцам разное число шашек, то это 1, 2, 3, …, 6 шашек в некотором порядке. Тогда всего получится 21 шашка. Но это количество должно делиться на 6, чтобы по строкам количества совпали. Противоречие.

9. Задача. *В треугольнике ABC известны стороны: AB = 5 , BC = 6 , AC = 7. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках E и F, отличных от вершин треугольника. Отрезок EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка EF.*

Ответ: $\frac{14}{9}$.

Решение.



1. Четырёхугольник $AEFC$ вписан в окружность, проходящую через точки A и C, поэтому сумма углов EAC и EFC равна $180°$. Сумма смежных углов EFC и BFE также равна $180°$, откуда $\angle BAC = \angle BFE$. Кроме того, треугольники ABC и FBE имеют общий угол B, следовательно, эти треугольники подобны и, значит, $BF : BE : EF$ = 5:6:7.

2. Из условия следует, что четырёхугольник $AEFC$ описан около окружности, вписанной в треугольник ABC, поэтому $EF + AC = AE + CF$. Обозначив $BF = 5x$, $BE = 6x$, $EF = 7x$, получаем $7x + 7 = 5 - 6x + 6 - 5x$, откуда $x = \frac{2}{9}$ и, значит, $EF = 7x = \frac{14}{9}$.

Решите две следующие задачи (№№ 10, 11) возможно большим числом способов (различными считаются способы, которые используют различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

10. Докажите, что на плоскости не существует равносторонних треугольников, все координаты вершин которых являются целыми числами.

11. Докажите, что число $25^{2019} + 1$ делится на 601.

12. Вам требуется подобрать три задачи для урока в 11 классе по теме «Геометрические идеи в алгебраических задачах». Какие задачи Вы выберете? Прокомментируйте каждую из выбранных задач (почему стоит показать именно эту задачу, какие идеи при этом демонстрируются и т.д.).