Двенадцатая олимпиада Эйлера для учителей математики
Санкт-Петербурга и Ленинградской области
Второй (очный) тур — 25 ноября 2018 года

1. Докажите неравенство $\frac{(\sin x)^{n+2}}{(\cos x)^n}+\frac{(\cos x)^{n+2}}{(\sin x)^n}\geq 1$ для всех $0<x<\frac{\pi}{2}$.

2. а) Найдите многочлен с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$.

б) Найдите все действительные корни найденного многочлена.

3. ВБ с супругой прибыли на встречу с тремя другими супружескими парами. Так как некоторые из гостей не были знакомы друг с другом, последовали рукопожатия только между незнакомыми (никто не пожимал руку ни своему супругу (супруге), ни себе). Когда все оказались знакомыми, ВБ спросил у остальных семи присутствующих, сколько рукопожатий они сделали. Оказалось, что все они пожали разное число рук. Сколько рук пожал ВБ?

4. Найдите такие условия на действительные числа a, b и c, при которых последовательности действительных чисел $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, и $\{z_n\}$ имеют пределы, если известно, что последовательность $\{x_n+y_n+z_n\}$ сходится к сумме $a+b+c$, а последовательность $\{x_ny_n+x_nz_n+y_nz_n\}$ — к сумме $ab+ac+bc$.

5. Дан тетраэдр, длины ребер которого равны 1. Докажите, что существует лежащий на поверхности этого тетраэдра набор отрезков с суммарной длиной меньшей $1+\sqrt{3}$, такой, что любые две вершины тетраэдра соединяются ломаной, состоящей из этих отрезков.

6. Рассмотрим следующую задачу: *Найти все пары $(m;n)$ различных натуральных чисел m и n, для которых* выполняется условие $m^n=n^m$. Известное решение этой задачи основано на исследовании функции $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

а) Приведите это решение.

б) Приведите еще какие-нибудь две задачи из различных областей математики, решения которых основаны на идеях из совсем других её областей.

7. Решите следующую задачу возможно большим числом способов (различными считаются способы, которые используют различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

Задача. Пусть *a, b, c* — длины сторон треугольника, r — радиус вписанной в этот треугольник окружности. Докажите, что если $r=\frac{a+b-c}{2}$, то данный треугольник является прямоугольным.