Двенадцатая олимпиада Эйлера для учителей математики

(заочный тур — 2018)

Уважаемые коллеги!

Вам предлагаются два блока заданий:

№ 1 — № 7. «Математический блок» (задачи для решения).

№ 8 — № 12. «Методический блок» (задания, моделирующие работу учителя).

Среди предложенных заданий есть и достаточно трудные; присылайте Ваши решения, даже если Вам не удалось выполнить некоторые из этих заданий. Единственное условие — в работе должно быть представлено хотя бы одно верно выполненное задание из каждого блока.

Желаем успеха! ***Жюри конкурса***

I. Математический блок

1. Найдите все значения a, при которых уравнение $5x^4+7ax+2a^2=0$ имеет хотя бы один целый корень.

2. Найдите 17-й член арифметической прогрессии, если известно, что её первый и 11-й члены являются натуральными числами, а сумма первых 14 членов равна 77.

3. Каждый участник лотереи **«*6 из 49*»** отмечает на своём билете шесть чисел из чисел 1, 2, … , 49. Во время проведения тиража лотереи случайным образом выбираются шесть чисел из чисел 1, 2, … , 49, которые объявляются *выигрышными*. Во сколько раз больше вероятность того, что в Вашем билете среди отмеченных Вами чисел выигрышными оказались четыре из них, чем вероятность того, что их там пять?

4. Найдите наибольшее значение выражения $y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{3+2y-2y^2}$.

5. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$, высота DH которого проходит через точку пересечения высот треугольника ABC.

а) Докажите, что противоположные рёбра этого тетраэдра перпендикулярны.

б) Докажите, что прямые, на которых лежат высоты этого тетраэдра, проходят через одну точку.

в) Выясните, верно ли обратное утверждение: «Если прямые, на которых лежат высоты тетраэдра, проходят через одну точку, то основаниями высот этого тетраэдра являются точки пересечения высот соответствующих граней».

6. Выясните, верно ли, что если при $x=0,1,2,3$ значения кубического многочлена ax^3+bx^2+cx+d являются целыми числами, то все его значения в целых точках тоже являются целыми числами.

7. Известно, что функция f: $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ является строго возрастающей и такой, что $f\left(f(n)\right)=3n$ при всех $n\in\mathbf{N}$. Найдите $f(2018)$

II. Методический блок

8. Укажите все имеющиеся в решении приведённой ниже задачи ошибки и недочеты и, если возможно, доведите решение до верного результата.

Задача. Докажите, что функция $f(x)=2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ является возрастающей.

Решение. Достаточно доказать, что возрастающей является функция $g(t)=f\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, где $t\in(-\pi;\pi)$. Заметим, что при указанных значениях t справедливо равенство $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)=\frac{t}{2}$. Далее, так как $\frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}=\sin t$ и $\arcsin(\sin t)=t$, то $g(t)=2t$. Таким образом, функция g является возрастающей.

9. Рассматривается треугольная пирамида, все плоские углы при вершине которой являются прямыми. Сформулируйте и докажите по меньшей мере два свойства этой пирамиды, аналогичные свойствам прямоугольного треугольника. Приведите также свойство прямоугольного треугольника, аналог которого для такой пирамиды неверен.

Решите три следующие задачи (№№ 10, 11, 12) возможно большим числом способов (различными считаются способы, которые используют различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

10. Сравните, не используя вычислительную технику, числа $\log_3 4$ и $\log_4 5$.

11. Вычислите сумму биномиальных коэффициентов $C_k^k+C_{k+1}^k+\ldots+C_n^k$.

12. Правильный семиугольник *ABCDEFG* вписан в единичную окружность. Докажите, что квадраты длин отрезков *AB*, *AC* и *AD* являются корнями уравнения $x^3-7x^2+14x-7=0$.