Одиннадцатая олимпиада Эйлера для учителей математики
(заочный тур-2017)

Уважаемые коллеги!

Вам предлагаются два блока заданий:

№ 1 — № 7. «Математический блок» (задачи для решения).

№ 8 — № 12. «Методический блок» (задания, моделирующие работу учителя).

Среди предложенных заданий есть и достаточно трудные; присылайте Ваши решения, даже если Вам не удалось выполнить некоторые из этих заданий. Единственное условие — в работе должно быть представлено хотя бы одно верно выполненное задание из каждого блока.

Желаем успеха! ***Жюри конкурса***

I. Математический блок

1. Найдите наибольшее значение функции $f(x;y)=6\sin x\cos y+3\sin x\sin y-2\cos x$.

2. В дроби $\frac{x^2-1}{x^2+1+(*)}$ замените значок $(*)$ одночленом так, чтобы дробь оказалась сократимой. Найдите все возможные решения.

3. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2\sqrt{x^4+ax}=x+a$ имеет единственное решение.

4. Найдите все непрерывные на $\boldsymbol{R}$ функции, для которых при всех $x\in\boldsymbol{R}$ справедливо равенство $f(3x+2)=f(x)$.

5. Вы собираетесь вложить в некоторый финансовый проект P рублей в расчете, что от его реализации через время t получите S рублей.

Для оценки эффективности подобных проектов часто используется величина i, называемая его доходностью, которая может быть определена по одной из формул $i=\frac{S-P}{Pt}$ (1) или $i=\left(\frac{S}{P}\right)^{1/t}-1$ (2). Вы хотите выбрать из двух возможных финансовых проектов более эффективный с точки зрения величины его доходности.

а) Возможна ли ситуация, в которой вычисления по формулам (1) и (2) дадут разные ответы на интересующий вас вопрос?

б) При каких дополнительных условиях эти вычисления дадут совпадающие ответы?

6. Найдите наименьшее значение площади общей части правильного восьмиугольника и его образа при повороте на некоторый угол относительно центра исходного восьмиугольника.

7. Имеется 100 бутылок с вином, в одной из которых вино испорчено. Требуется в течение часа при помощи белых мышей обнаружить плохое вино. Если мышь выпьет плохого вина, то через час она станет синей. Разрешается накапать вина из разных бутылок (но не более, чем из пяти) каждой мыши, и дать им выпить одновременно. Какого наименьшего числа мышей достаточно для решения поставленной задачи?

II. Методический блок

Ниже приводятся решения двух задач (№№ 8, 9). Оцените каждое из решений и полученные ответы. Укажите все имеющиеся в решениях ошибки и недочеты и, если возможно, доведите решение до верного результата.

8. Задача. Найдите длину стороны *AB* треугольника *ABC*, если известно, что $AC = 4$, $BC = 6$, а угол *A* вдвое больше угла *B*.

Ответ: 4 или 5.

«Решение». Обозначив через α угол *B* данного треугольника, согласно теореме синусов получаем $\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{6}{\sin 2\alpha}$, откуда $\cos\alpha = \frac{3}{4}$. Далее, согласно теореме косинусов, имеем: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$, т.е., $AB^2 - 9AB + 20 = 0$, откуда $AB = 4$ или $AB = 5$.

9. Задача. Решите уравнение $3\sin 2x + 7\sin x = 5 + 7\cos x$.

Ответ: $x = \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{8}{9} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

«Решение». $3\sin 2x + 7\sin x = 5 + 7\cos x \iff 3\sin 2x + 7(\sin x - \cos x) - 5 = 0$.

Положим $t = \sin x - \cos x$, тогда $t^2 = \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 - \sin 2x$, откуда

$$\sin 2x = 1 - t^2. \qquad (*)$$

Получаем уравнение $3(1 - t^2) + 7t - 5 = 0$ или $3t^2 - 7t + 2 = 0$, решая которое находим $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = 2$. Подставляя найденные значения t в формулу (*), получаем $\sin 2x = -3$ или $\sin 2x = \frac{8}{9}$. Уравнение $\sin 2x = -3$ решений не имеет, а из уравнения $\sin 2x = \frac{8}{9}$ находим $x = \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{8}{9} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Решите две следующие задачи (№№ 10, 11) возможно большим числом способов (различными считаются способы, которые используют различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

10. Найдите сумму $x + y$, если известно, что $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$.

11. Пусть *B* и *C* — точки касания с окружностью радиуса *R* касательных к ней, проведенных из точки *A*. Пусть также *r* — радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*, а r_a — радиус его вневписанной окружности, касающейся стороны *BC*, равной *a*. Докажите, что $4R^2 = r^2 + r_a^2 + \frac{a^2}{2}$.

12. Сформулируйте и докажите для тетраэдра свойства (чем больше, тем лучше), аналогичные свойствам биссектрис углов треугольника.