Десятая олимпиада Эйлера для учителей математики

Решения задач заочного тура

1. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, задаваемое уравнением $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{2-y}{2-x}$.

Решение. Область определения уравнения задается условиями: $x \neq 2$, $y \neq 0$ (1), а область возможных решений — неравенством $\frac{2-y}{2-x} \geq 0$, которое задает на координатной плоскости Oxy пару вертикальных углов $\begin{cases} x > 2, \\ y \geq 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x < 2, \\ y \leq 2. \end{cases}$ (2)

При этих условиях имеем:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{2-y}{2-x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{2-y}{2-x}, \\ \frac{x}{y} = -\frac{2-y}{2-x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - x^2 = 2y - y^2, \\ 2x - x^2 = -2y + y^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (x-y)(x+y-2) = 0, & (3) \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2. & (4) \end{array}\right.$$

Уравнение (3) задает на координатной плоскости Oxy объединение двух прямых: $y = x$ и $y = -x + 2$, а уравнение (4) — окружность с центром (1; 1) и радиусом $\sqrt{2}$.

Множество точек, задаваемое на координатной плоскости Oxy условиями (1), (2), (3) и (4) изображено на рисунке 1.

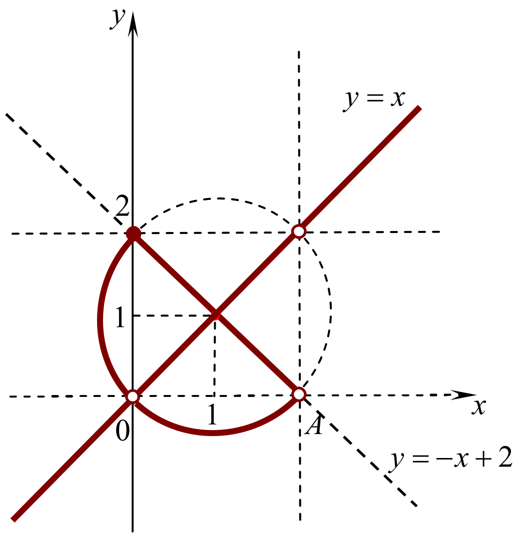

*Рис.*1

2. Верно ли, что в любой арифметической прогрессии с натуральными членами найдутся два числа с одинаковой суммой цифр?

Ответ: Да, верно.

Решение. Пусть $a_n = \overline{x_1 x_2 \dots x_k}$ — n-й член некоторой арифметической прогрессии с натуральными членами, в записи которого содержится k цифр, и пусть $d = \overline{y_1 y_2 \dots y_m}$ — разность этой прогрессии. Тогда $a_{n+10^k} = a_n + d \cdot 10^k = \overline{y_1 y_2 \dots y_m x_1 x_2 \dots x_k}$, $a_{n+10^{k+1}} = a_n + d \cdot 10^{k+1} = \overline{y_1 y_2 \dots y_m 0 x_1 x_2 \dots x_k}$.

Числа $\overline{y_1 y_2 \dots y_m x_1 x_2 \dots x_k}$ и $\overline{y_1 y_2 \dots y_m 0 x_1 x_2 \dots x_k}$ имеют одинаковую сумму цифр.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} abc + ab + bc + ca + a + b + c = 2, \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d = 5, \\ cda + cd + da + ac + c + d + a = 7, \\ dab + da + ab + bd + d + a + b = 17. \end{cases}$$

Ответ: $a = \sqrt[3]{12} - 1$, $b = \frac{3}{4}\sqrt[3]{12} - 1$, $c = \frac{1}{3}\sqrt[3]{12} - 1$, $d = 2\sqrt[3]{12} - 1$.

Решение.

$$\begin{cases} abc + ab + bc + ca + a + b + c = 2, \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d = 5, \\ cda + cd + da + ac + c + d + a = 7, \\ dab + da + ab + bd + d + a + b = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 = 3, \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d + 1 = 6, \\ cda + cd + da + ac + c + d + a + 1 = 8, \\ dab + da + ab + bd + d + a + b + 1 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)(b+1)(c+1) = 3, \\ (b+1)(c+1)(d+1) = 6, \\ (c+1)(d+1)(a+1) = 8, \\ (d+1)(a+1)(b+1) = 18. \end{cases}$$

Положив $x = a + 1$, $y = b + 1$, $z = c + 1$, $t = d + 1$, получаем

$$\begin{cases} xyz = 3, \\ yzt = 6, \\ ztx = 8, \\ txy = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3y^3z^3t^3 = 2^5 \cdot 3^4, \\ yzt = 6, \\ ztx = 8, \\ txy = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyzt = 6\sqrt[3]{12}, \\ yzt = 6, \\ ztx = 8, \\ txy = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{12}, \\ y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{12}, \\ z = \frac{1}{3}\sqrt[3]{12}, \\ t = 2\sqrt[3]{12}, \end{cases}$$

откуда $a = \sqrt[3]{12} - 1$, $b = \frac{3}{4}\sqrt[3]{12} - 1$, $c = \frac{1}{3}\sqrt[3]{12} - 1$, $d = 2\sqrt[3]{12} - 1$.

4. Первая и последняя цифры n-значного числа равны 1, а все остальные его цифры равны 0. Найдите все такие n, при которых это число делится на 10001.

Ответ: $n = 8k + 5$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Решение. Рассмотрим число $a = \underbrace{100\ldots01}_{n} = 10^{n-1} + 1$ и положим $x = 10$.

Тогда $a = x^{n-1} + 1$, $10001 = x^4 + 1$. Многочлен $x^{n-1} + 1$ делится на двучлен $x^4 + 1$, если $\frac{n-1}{4} = 2k + 1$, т. е., при $n = 8k + 5$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Поэтому, при этих значениях n число a делится на 10001.

Покажем теперь, что при других значениях n число a не делится на 10001.

Рассмотрим n-значное число $10^{n-1} + 1$ и ($n + 8$)-значное число $10^{n+7} + 1$. Разность этих чисел $10^{n+7} + 1 - 10^{n-1} - 1 = 10^{n-1}(10^8 - 1) = 10^{n-1}(10^8 - 1) = 10^{n-1}(10^4 - 1)(10^4 + 1)$ делится на $10001 = 10^4 + 1$, следовательно, ($n + 8$)-значное число делится на 10001 тогда и только тогда, когда на 10001 делится n-значное число. Осталось проверить, делится ли на 10001 n-значное число при $n = 0, 1, \ldots, 7$. Первые пять из этих чисел меньше 10001, шестое число и есть 10001. Непосредственная проверка показывает, что оставшиеся два числа на 10001 не делятся.

5. В основании пирамиды с вершиной S лежит квадрат $ABCD$. Известно, что $AS = 7$, $BS = DS = 5$. Какие значения может принимать длина стороны квадрата $ABCD$? Найдите также длину бокового ребра CS такой пирамиды.

Ответ: $3\sqrt{2} < AB < 4\sqrt{2}$, $SC = 1$.

Решение 1. Известно, что если $ABCD$ — прямоугольник, то для любой точки S пространства справедливо равенство $AS^2 + CS^2 = BS^2 + DS^2$ (проще всего это доказать координатным методом). Таким образом, в рассматриваемой пирамиде $CS^2 = 2BS^2 - AS^2 = 50 - 49 = 1$.

Оценим длину a стороны квадрата $ABCD$. Из треугольников ABS, BCS, BDS и ACS, соответственно (см. рисунок 2.1) получаем:

$$\begin{cases} 2 < a < 12, \\ 4 < a < 6, \\ a\sqrt{2} < 10, \\ 6 < a\sqrt{2} < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 3\sqrt{2} < a < 4\sqrt{2}.$$

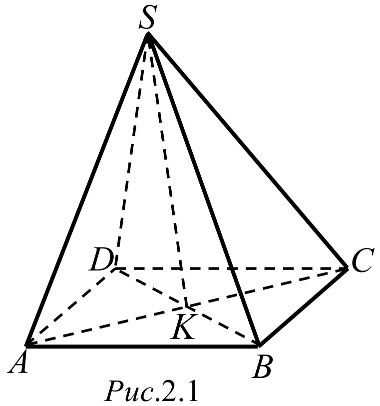

*Рис.*2.1

Решение 2. Пусть точка H — проекция точки S на плоскость ABC. Поскольку плоские углы SAB и SAD трехгранного угла $ABDS$ равны, точка H принадлежит прямой AC. Выберем систему координат так, как это показано на рисунке 2.2.

Положив $AB = a$, $SH = s$, в этой системе координат имеем: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$, $S(t;t;s)$, $AS^2 = 2t^2 + s^2$,

$BS^2 = (t-a)^2 + t^2 + s^2 = 2t^2 - 2at + a^2 + s^2$.

Поскольку, согласно условию задачи, $AS^2 = 49$, $BS^2 = 25$, получаем систему:

$$\begin{cases} 2t^2 + s^2 = 49, \\ 2t^2 - 2at + a^2 + s^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{a^2+24}{2a}, \\ s^2 = \frac{a^4-50a^2+576}{2a^2}. \end{cases}$$

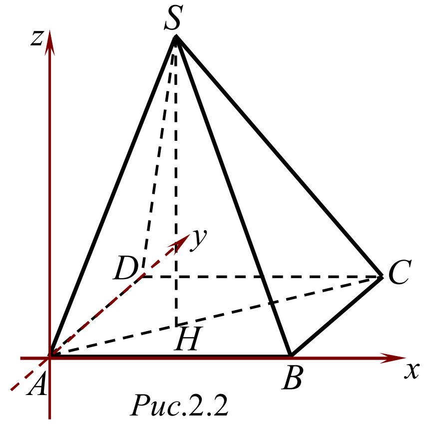

*Рис.*2.2

Для разрешимости этой системы необходимо и достаточно выполнения условия $a^4 - 50a^2 + 576 < 0 \Leftrightarrow 18 < a^2 < 32$, откуда, учитывая $a > 0$, находим $3\sqrt{2} < a < 4\sqrt{2}$.

Далее имеем $CS^2 = \sqrt{2(t-a)^2 + s^2} = \sqrt{2((t-a)^2 + t^2 + s^2) - (2t^2 + s^2)} = \sqrt{50-49} = 1$.

6. Решите уравнение $11^{\log_6(2x-1)} - 6^{\log_{11}(2x+4)} = 5$.

Ответ: $3{,}5$.

Решение 1.

$$11^{\log_6(2x-1)} - 6^{\log_{11}(2x+4)} = 5 \Leftrightarrow 11^{\log_6(2x-1)} - 6^{\log_{11}(2x+4)} = 11^{\log_{11}(2x+4)} - 6^{\log_6(2x-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11^{\log_6(2x-1)} + 6^{\log_6(2x-1)} = 11^{\log_{11}(2x+4)} + 6^{\log_{11}(2x+4)}.$$

Функция $f(t)=11^t+6^t$ возрастает (сумма двух возрастающих функций) и, значит, уравнение $11^{t_1}+6^{t_1}=11^{t_2}+6^{t_2}$ имеет единственное решение $t_1=t_2=t$, т.е. $t=\log_{11}(2x+4)=\log_6(2x-1)$, откуда $2x=11^t-4=6^t+1$, $6^t+5=11^t$, $\left(\frac{6}{11}\right)^t+\frac{5}{11^t}=1$. Левая часть последнего уравнения задает убывающую функцию, следовательно, уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим $t=1$, откуда $x=3{,}5$.

Решение 2. Положим $u=\log_6(2x-1)$, $v=\log_{11}(2x+4)$. Тогда данное уравнение приобретает вид $11^u-6^v=5$. Поскольку $2x=6^u+1$ и $2x=11^v-4$, то $11^v-6^u=5$. Таким образом, пара $(u;v)$ является решением системы

$$\begin{cases}11^u-6^v=5,\\ 11^v-6^u=5.\end{cases}$$

Ясно, что пара (1; 1) является решением этой системы. Докажем, что других решений эта система не имеет.

Введем функцию $f(x)=\log_{11}(6^x+5)$. Первое уравнение системы равносильно уравнению $u=f(v)$, а второе — уравнению $v=f(u)$, следовательно, числа u и v являются решениями уравнения $f\big(f(x)\big)=x$. Поскольку $f(x)$ — возрастающая функция, то, как известно, эти числа являются решениями уравнения $f(x)=x$.

Далее имеем:

$$f'(x)=\frac{6^x\ln 6}{(6^x+5)\ln 11}<(x)'=1,$$

значит, уравнение $f(x)=x$ имеет не более одного корня. Следовательно, $u=v=1$, откуда $x=3{,}5$.

7. Найдите наименьшее число плоскостей, которые разбивают куб на 43 части ненулевого объема.

Ответ: 7 плоскостей.

Решение. Известно, что n плоскостей разбивают пространство не более, чем на $1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n^3+5n+6}{6}$ частей. *) При этом равенство достигается в случае плоскостей так называемого «общего положения», когда никакие две плоскости не параллельны, никакие три плоскости не параллельны одной прямой, никакие четыре плоскости не проходят через одну точку.

При $n=6$ получаем, что частей не больше 42. Значит, шести плоскостей недостаточно. Покажем, что достаточно семи плоскостей.

Рассмотрим шесть плоскостей общего положения, разбивающих пространство на 42 части. Возьмем куб такого размера, чтобы внутри него лежали все точки пересечения троек выбранных плоскостей. Тогда этот куб также разбит на 42 части. Проведем седьмую плоскость настолько близко к одной из вершин куба, чтобы она рассекла ровно одну из 42 имеющихся частей на две. В результате куб и окажется разбит на 43 части.

---

*) **О.А.Иванов. «*Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей*» М.: МЦНМО, 2009. Задача 1.21; условие на стр. 33, решение на стр. 341-342. (На стр. 66-69 разбирается *n*-мерный случай).**

8. Приведите хотя бы четыре примера заданных на всей числовой прямой функций, для каждой из которых справедливо равенство $f(f(x)) = 4x$.

Примеры 1,2. Два примера таких функций очевидны — это функции

$$f_1(x) = 2x \quad \text{и} \quad f_2(x) = -2x.$$

Примеры 3,4. В качестве еще двух примеров можно привести такие функции (здесь Q — множество рациональных чисел):

$$f_3(x) = \begin{cases} 2x, & x \in Q, \\ -2x, & x \notin Q \end{cases} \quad \text{и} \quad f_4(x) = \begin{cases} -2x, & x \in Q, \\ 2x, & x \notin Q. \end{cases}$$

Действительно, если $x \in Q$, то и $f_3(x) \in Q$, $f_4(x) \in Q$, а если $x \notin Q$, то и $f_3(x) \notin Q$, $f_4(x) \notin Q$. Поэтому $f_3(f_3(x)) = 4x$ и $f_4(f_4(x)) = 4x$.

Пример 5. Из равенства $f(f(x)) = 4x$ следует, что $f(f(f(x))) = f(4x)$. С другой стороны, $f(f(f(x))) = 4f(x)$, откуда $4f(x) = f(4x)$. Это означает, что, если значения аргументов отличаются в 4 раза, то по одному из соответствующих значений функции однозначно определяется другое ее значение.

Разобьём положительную полуось на полуинтервалы: $\ldots$, $\left[\frac{1}{16};\frac{1}{4}\right)$, $\left[\frac{1}{4};1\right)$, $[1;4)$, $[4;16)$, $\ldots$. На промежутке $[1;4)$ зададим функцию

$$f_0(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{2}, & x \in \left[1;\frac{5}{2}\right), \\ 4x - 6, & x \in \left[\frac{5}{2};4\right). \end{cases}$$

Эта функция левую половину промежутка $[1;4)$, т.е., промежуток $[1;2)$, отображает на его правую половину — промежуток $[2;4)$, а правую половину промежутка $[1;4)$ отображает на левую половину следующего промежутка $[4;16)$. Значения функции на остальных промежутках получаем следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \ldots \\ \ldots \\ \frac{1}{4} f_0(x), & x \in \left[\frac{1}{4};1\right), \\ f_0(x), & x \in [1;4), \\ 4 f_0(\frac{x}{4}), & x \in [4;16), \\ 16 f_0(\frac{x}{16}), & x \in [16;64), \\ \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

На отрицательной полуоси определим функцию так, чтобы она была нечетной и положим $f(0) = 0$.

Покажем, что заданная нами функция удовлетворяет условию задачи:

Если $x \in \left[1;\frac{5}{2}\right)$, то $f(f(x)) = f\left(x + \frac{3}{2}\right) = 4\left(x + \frac{3}{2}\right) - 6 = 4x$.

Если $x \in \left[\frac{5}{2};4\right)$, то $f(f(x)) = f\left(4x - 6\right) = 4 f_0\left(\frac{4x-6}{4}\right) = 4\left(\frac{4x-6}{4} + \frac{3}{2}\right) = 4x$.

Таким образом, для всех точек множества $\left[\frac{1}{4};1\right)$ требуемое соотношение выполнено, а для точек остальных множеств соотношение выполняется в силу определения функции $f(x)$.

Пример 6. В заключение покажем, как можно построить семейство убывающих функций, удовлетворяющих условию задачи:

Пусть $a<0$. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{a}, & x\in(-\infty;0],\\ 4ax, & x\in[0;+\infty).\end{cases}$$

Покажем, что заданная нами функция удовлетворяет условию задачи:

Если $x\le 0$, то $\frac{x}{a}\ge 0$ и $f\left(f(x)\right)=f\left(\frac{x}{a}\right)=4a\cdot\left(\frac{x}{a}\right)=4x$.

Если $x\ge 0$, то $4ax\le 0$ и $f\left(f(x)\right)=f\left(4ax\right)=\frac{1}{a}\cdot\left(4ax\right)=4x$.

Замечание. ***Ясно, что при $a=-\frac{1}{2}$ мы получаем функцию $f_2(x)=-2x$ (см. Пример 2).***

9. Оцените приведенное ниже решение задачи и укажите все ошибки и недочеты

Задача. В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AD* и *BE*. Оказалось, что *DE* — биссектриса треугольника *ADC*. Найдите угол *BAC*.

Решение. Рассмотрим точку *E* на стороне *AC*. Так как она лежит на биссектрисе угла *B*, то она равноудалена от *AB* и *BC*. Так как она также лежит на биссектрисе угла *ADC*, то она равноудалена от *DC* (или, что то же самое, от *BD*) и *AD*. Значит, она равноудалена от *AB*, *BD* и *AD*. Следовательно, это центр вписанной в треугольник *ABD* окружности, чего быть не может, так как точка *E* лежит вне этого треугольника. Таким образом, условие задачи некорректно.

Комментарий. В предложенном решении верно доказано, что точка *E* равноудалена от прямых, содержащих стороны треугольника. К сожалению, из этого верного наблюдения сделан неверный вывод. Существует 4 точки, равноудаленные от прямых, содержащих стороны треугольника: центр вписанной в треугольник окружности и центры его вневписанных окружностей.

Поскольку точка *E* лежит вне треугольника *ABD* (это верное наблюдение сделано в представленном доказательстве), она, действительно не может являться центром вписанной окружности. Из этого автор решения делает вывод, что условие задачи некорректно, а нужно было сделать вывод о том, что эта точка является центром вневписанной окружности треугольника *ABD* (см. рисунок 3).

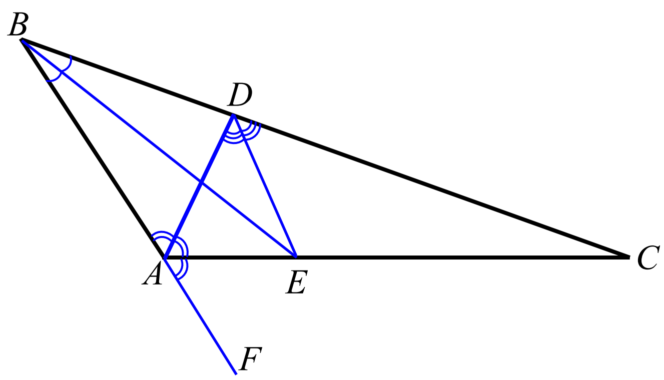

*Рис.*3

После этого решение легко завершить. Нужно только заметить, что луч AE является биссектрисой угла DAF (в силу равноудалённости точки E от прямых AD и AF), а, значит, угол BAC равен $120°$.

Верный ответ: $120°$.

10. Двое рабочих, работая вместе, выполнили половину задания, после чего увеличили свои производительности, один — на 20%, другой — на 16%. В результате вторая половина задания была ими выполнена на один день быстрее, чем первая. Выясните, уложились ли рабочие с выполнением этого задания в двухнедельный срок.

Решение. Предположим, что задание было выполнено за 14 дней. Тогда на выполнение его первой половины они затратили 7,5 дней, а на выполнение второй — 6,5 дней. Обозначим через x и y начальные производительности рабочих (в долях работы, выполненной за один день). Тогда их производительности при выполнении второй половины работы равны, соответственно, $1{,}2x$ и $1{,}16y$. Составим систему

$$\begin{cases} 7{,}5(x+y)=0{,}5, \\ 6{,}5(1{,}2x+1{,}16y)=0{,}5. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем $x=-\frac{2}{195}$, $y=\frac{1}{13}$. Поскольку производительности не могут быть отрицательны, система решений не имеет, а, значит, рабочие не смогли уложиться в двухнедельный срок.

Ответ: нет, не уложились.

Комментарий. Ошибка решения состоит в том, что автор этого решения понимает выражение «уложиться в две недели» как «выполнить работу **ровно** за две недели». Приведенное рассуждение показывает, что рабочие не могли закончить работу **ровно** за 14 дней, но это не означает, что они не могли выполнить ее за меньшее время.

Приведем теперь верное решение.

Обозначим через x и y начальные производительности рабочих (в долях работы, выполненной за один день), а через t — время, затраченное ими на выполнение первой половины задания. По условию, при работе над его второй половиной их производительности равны, соответственно, $1{,}2x$ и $1{,}16y$. Поскольку на эту часть работы им потребовалось на один день меньше, получаем:

$$\begin{cases} t(x+y)=\frac{1}{2}, \\ (t-1)(1{,}2x+1{,}16y)=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}2x+1{,}16\left(\frac{1}{2t}-x\right)=\frac{1}{2(t-1)}, \\ y=\frac{1}{2t}-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{29-4t}{2t(t-1)}, \\ y=\frac{5(t-6)}{2t(t-1)}. \end{cases}$$

Поскольку $t>1$ и $x+y=\frac{1}{2t}$, система имеет решения, удовлетворяющие условию $0<x<1$, $0<y<1$ при $6<t<\frac{29}{4}$. На выполнение всего задания потребовалось $2t-1$ дней. Так как $11<2t-1<13{,}5$, то рабочие справились с выполнением задания в двухнедельный срок.

Верный ответ: да, уложились.

11. Треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ вписан в окружность. Касательная к этой окружности в точке C перпендикулярна прямой AB. Докажите, что $(b^2 - a^2)^2 = c^2(a^2 + b^2)$.

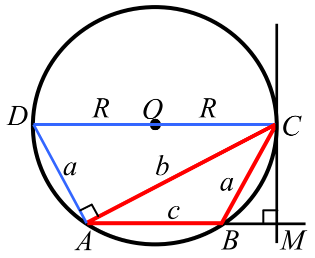

*Рис.*4.1

Решение 1. Пусть прямая CM — касательная к данной окружности в точке C ($M \in AB$), отрезок CD — диаметр этой окружности и $CD = 2R$ (см. рисунок 4.1). Тогда $CD \parallel AB$, так как $CD \perp CM$ и $AB \perp CM$, а, значит, $AD = BC = a$. Кроме того, $AD \perp AC$, следовательно, $a^2 + b^2 = 4R^2$. По теореме Птолемея $b^2 = a^2 + 2Rc$, откуда $b^2 - a^2 = 2Rc$ и $(b^2 - a^2)^2 = 4R^2c^2 = c^2(a^2 + b^2)$.

Тема. **«Теорема Птолемея»**

Решение 2. Так как $\angle BAC = 0{,}5\overset{\smile}{BC}$ и $\angle BCM = 0{,}5\overset{\smile}{BC}$, то $\angle BCM = \angle BAC = \varphi$. Обозначим через h длину отрезка CM касательной к окружности в точке C (см. рисунок 4.2).

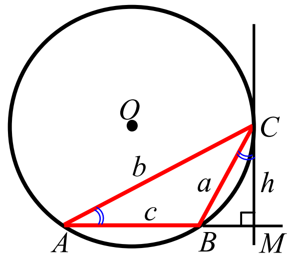

*Рис.*4.2

Из прямоугольных треугольников ACM и BCM находим:

$$a = \frac{h}{\cos\varphi},\ b = \frac{h}{\sin\varphi},\ c = AM - BM = \frac{h}{\operatorname{tg}\varphi} - h\operatorname{tg}\varphi.$$

Подставляя выражения для a, b и c в доказываемое равенство, получаем:

$$\left(\left(\frac{h}{\cos\varphi}\right)^2 - \left(\frac{h}{\sin\varphi}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{h}{\cos\varphi} - h\operatorname{tg}\varphi\right)^2\left(\left(\frac{h}{\cos\varphi}\right)^2 + \left(\frac{h}{\sin\varphi}\right)^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$ — верно.

Тема. **«Вписанный угол, угол между касательной и хордой»**

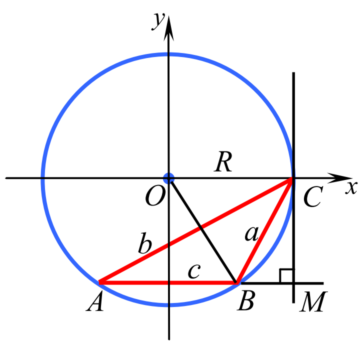

*Рис.*4.3

Решение 3. Выберем систему координат как это показано на рисунке 4.3. В этой системе координат имеем: $A(-p;q)$, $B(p;q)$. $C(R;0)$, причем $p^2 + q^2 = R^2$.

Далее находим:

$$a^2 = (p-R)^2 + q^2,\ b^2 = (p+R)^2 + q^2,\ c^2 = (2p)^2.$$

Подставляя выражения для a^2, b^2 и c^2 в доказываемое равенство, получаем: $(4pR)^2 = (2p)^2(2p^2 + 2q^2 + 2R^2)$, что, учитывая условие $p^2 + q^2 = R^2$ верно.

Тема. **«Метод координат на плоскости»**

Решение 4. Воспользуемся известным свойством трапеции: «Сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов ее боковых сторон и удвоенного произведения оснований». В нашем случае (см. рисунок 4.1) имеем: $2b^2 = 2a^2 + 2\cdot 2cR$, откуда $b^2 - a^2 = 2cR$, $(b^2 - a^2)^2 = c^2 \cdot 4R^2$.

Поскольку $4R^2 = a^2 + b^2$, окончательно получаем $(b^2 - a^2)^2 = c^2(a^2 + b^2)$.

Тема. **«Свойства трапеции»**

Замечание. ***Во всех четырех приведенных выше решениях предполагалось, что $b > a$. Совершенно очевидно, что если поменять местами вершины A и B данного треугольника все выкладки останутся прежними.***

12. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых неравенство $|2x+a|<1-4x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Ответ: $-1<a<\frac{5}{4}$.

Общее замечание. Положив $t=2x$, получаем равносильную задачу «Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых неравенство $|t+a|<1-t^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Решение 1. Изобразим графики функций $y=|t+a|$ и $y=1-t^2$ в одной системе координат (см. рисунок 5.1). Неравенство $|t+a|<1-t^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение при $a_2<a<a_1$, где прямая $y=t+a_1$ — касательная к графику функции $y=1-t^2$, а прямая $y=-t-a_2$ проходит через точку (0; 1).

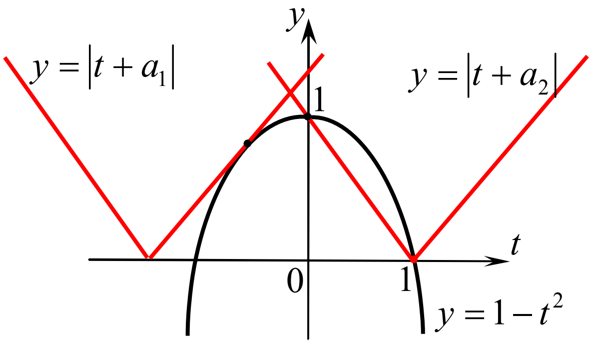

*Рис.*5.1

Имеем: 1. Уравнение $t^2+t+a_1-1=0$ должно иметь ровно одно решение.

$$D=1-4(a_1-1)=5-4a_1=0,\ a_1=\frac{5}{4}.$$

2. Прямая $y=-t-a_2$ проходит через точку (0; 1), откуда $1=0-a_2$, $a_2=-1$. Таким образом, $-1<a<\frac{5}{4}$.

Тема. **«Графоаналитические методы решения задач с параметрами»**

Решение 2. $|t+a|<1-t^2 \iff \begin{cases} a<-t^2-t+1, \\ a>t^2-t-1. \end{cases}$

Изобразим на координатной плоскости Oxa множество точек, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} a<-t^2-t+1, \\ a>t^2-t-1, \\ t<0. \end{cases}$$

1. Находим вершину параболы $a=-t^2-t+1$:

$$\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$$

2. Находим вершину параболы $a=t^2-t-1$:

$$\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{4}\right)$$

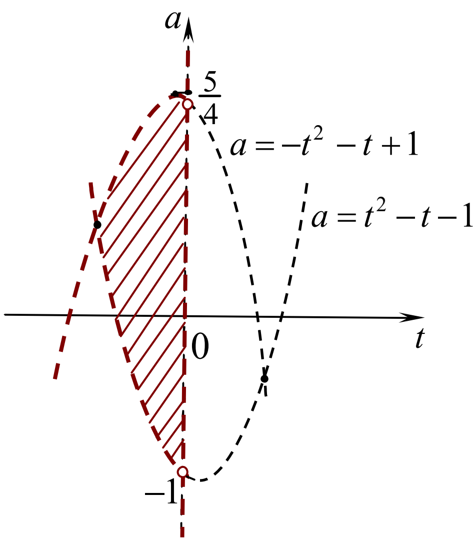

*Рис.*5.2

3. Находим точки пересечения парабол $a=-t^2-t+1$ и $a=t^2-t-1$:

$$\begin{cases} a=-t^2-t+1, \\ a=t^2-t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=-1, \\ a=1, \end{cases} \\ \begin{cases} t=1, \\ a=-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Искомое множество — пересечение внутренних областей парабол $a=-t^2-t+1$, $a=t^2-t-1$ и полуплоскости $t<0$. (см. рисунок 5.2). Ординаты точек этого множества образуют интервал $\left(-1;\frac{5}{4}\right)$

Тема. **«Неравенства с двумя переменными»**

Решение 3. Если $1-t^2\le 0$, то неравенство $|t+a|<1-t^2$ решений не имеет. Следовательно, $|t+a|<1-t^2 \Leftrightarrow \sqrt{|t+a|}<\sqrt{1-t^2}$. График функции $y=\sqrt{|t+a|}$ симметричен относительно прямой $t=-a$, а графиком функции $y=\sqrt{1-t^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром (0;0). Изобразим графики этих функций в одной системе координат (см. рисунок 5.3).

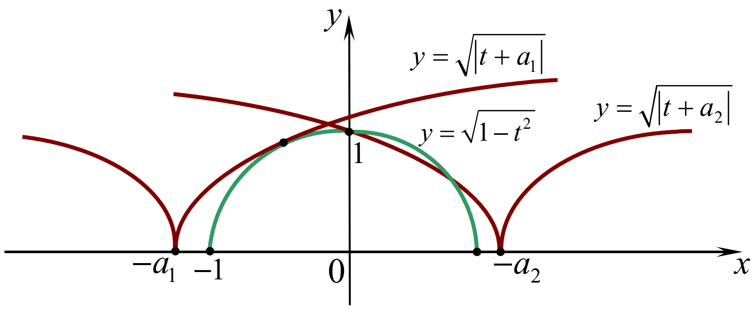

Рис.5.3

Неравенство $|t+a|<1-t^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение при $a_2<a<a_1$, где график $y=\sqrt{t+a_1}$ касается графика $y=\sqrt{1-t^2}$, а график $y=\sqrt{-t-a_2}$ проходит через точку (0; 1).

1. Учитывая $-1<t<0$, имеем: $y=\sqrt{t+a_1}=\sqrt{1-t^2} \Leftrightarrow t+a_1=1-t^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2+t+a_1-1=0$. Это уравнение должно иметь ровно одно решение.

$$D=1-4(a_1-1)=5-4a_1=0,\ a_1=\frac{5}{4}.$$

2. График $y=\sqrt{-t-a_2}$ проходит через точку (0; 1), откуда $1=\sqrt{0-a_2}$, $a_2=-1$.

Таким образом, $-1<a<\frac{5}{4}$.

Тема. **«Уравнение окружности, осевая симметрия»**

Решение 4. $|t+a|<1-t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t+a<1-t^2, \\ t+a>t^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+t+(a-1)<0, & (1) \\ t^2-t-(a+1)<0. & (2) \end{cases}$

Каждое из неравенств (1) и (2) будет иметь отрицательные решения, если дискриминанты соответствующих трехчленов D_1 и D_2 будут положительны, а меньший из корней каждого трехчлена будет отрицателен.

Имеем:

1. $t^2+t+(a-1)=0$

$D_1=1-4(a-1)=5-4a>0$, $a<\frac{5}{4}$;

$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5-4a}}{2}$, и, значит, меньший корень $t_1=\frac{-1-\sqrt{5-4a}}{2}$ отрицателен при любом допустимом значении *a*.

2. $t^2-t-(a+1)=0$

$D_1=1+4(a+1)=5+4a>0$, $a>-\frac{5}{4}$;

$t'_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5+4a}}{2}$, и, значит, больший корень $t'_2=\frac{1+\sqrt{5+4a}}{2}$ положителен при любом допустимом значении *a*. Выясним, при каких значениях *a* меньший корень будет отрицателен: $\frac{1-\sqrt{5+4a}}{2}<0 \Leftrightarrow \sqrt{5+4a}>1 \Leftrightarrow a>-1$.

Таким образом, оба неравенства будут иметь отрицательные решения при условии $-1<a<\frac{5}{4}$.

Больший корень второго трехчлена больше меньшего корня первого трехчлена. Значит, для того, чтобы неравенства (1) и (2) имели общие отрицательные решения необходимо и достаточно, чтобы больший корень первого трехчлена был больше меньшего корня второго трехчлена, т.е., чтобы выполнялось условие $t_2>t'_1$.

$$\frac{-1+\sqrt{5-4a}}{2}>\frac{1-\sqrt{5+4a}}{2} \Leftrightarrow -1+\sqrt{5-4a}>1-\sqrt{5+4a} \Leftrightarrow \sqrt{5-4a}+\sqrt{5+4a}>2.$$

Последнее неравенство верно при любом допустимом значении *a*, так как оба слагаемых его левой части неотрицательны и одно из них больше 2 при неотрицательных значениях *a*, а другое — при отрицательных.

Таким образом, система, а, значит, и исходное неравенство будут иметь отрицательные решения при условии $-1<a<\frac{5}{4}$.

Тема. **«Аналитические методы решения задач с параметрами»**