Решение задач очного тура девятой олимпиады Эйлера

1. Рассматриваются все решения системы

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=x, \\ x \ge y \ge z \ge 0. \end{cases}$$

Найдите все значения, которые может принимать x.

Ответ: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 1.

Решение 1. Так как $x^2+y^2+z^2=x=x(x+y+z)$, значит, $xy-y^2+xz-z^2=0$, откуда $y(x-y)+z(x-z)=0$. По условию оба слагаемых неотрицательны, поэтому их сумма равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю. Следовательно,

$$1)\ \begin{cases} y=0, \\ z=0 \end{cases} \text{ или } 2)\ \begin{cases} x-y=0, \\ z=0 \end{cases} \text{ или } 3)\ \begin{cases} x-y=0, \\ x-z=0 \end{cases} \text{ или } 4)\ \begin{cases} y=0, \\ x-z=0. \end{cases}$$

В случае 1) $x=1,\ y=z=0$; в случае 2) $x=y=\frac{1}{2},\ z=0$; в случае 3) $x=y=z=\frac{1}{3}$. Случай 4) невозможен в силу условия $x+y+z=1$.

Решение 2.

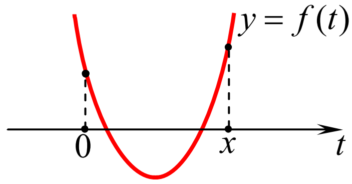
$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=x, \\ x \ge y \ge z \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1-x-y, \\ 2y^2+(2x-2)y+(2x^2-3x+1)=0, \\ x \ge y \ge z \ge 0. \end{cases}$$

Заметим, что подставив из первого уравнения данной системы $y=1-x-z$ во второе уравнение, получим точно такое же квадратное уравнение относительно z, а именно:

$$2z^2+(2x-2)z+(2x^2-3x+1)=0.$$

Таким образом, квадратное уравнение $2t^2+(2x-2)t+(2x^2-3x+1)=0$ должно иметь два корня (не обязательно различных), принадлежащих отрезку $[0; x]$, больший из которых будет равен y, а меньший — z.

Пусть $f(t)=2t^2+(2x-2)t+(2x^2-3x+1)$. Тогда имеет место система (см.рисунок):



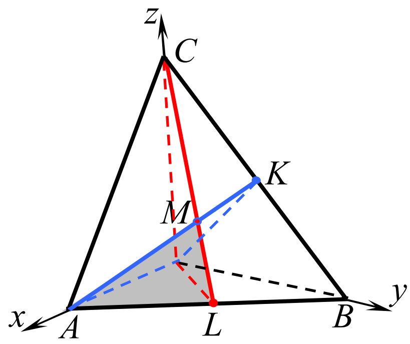
$$\begin{cases} f(0) \ge 0, \\ f(x) \ge 0, \\ D \ge 0, \\ \frac{1}{3} \le x \le 1. \end{cases}$$

Имеем: $f(0)=2x^2-3x-1 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \frac{1}{2}, \\ x \ge 1; \end{array}\right.$ $f(x)=6x^2-5x+1 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \frac{1}{3}, \\ x \ge \frac{1}{2}; \end{array}\right.$

$$\frac{D}{4}=-3x^2+4x-1 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le x \le 1.$$

Пересекая полученные условия, получаем $x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$.

Решение 3. Найдем на плоскости $x+y+z=1$ множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $0 \le z \le y \le x$. Поскольку это множество лежит в первом октанте, то оно лежит в треугольнике с вершинами с точках $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ и $C(0;0;1)$.[1)]



Плоскость $z=y$ содержит ось абсцисс и пересекает отрезок BC в его середине — точке K, а множеством точек, удовлетворяющих неравенствам $0 \le z \le y$, является множество точек треугольника ABK. Аналогично, множеством точек, удовлетворяющих неравенствам $0 \le y \le x$, является множество точек треугольника ACL, где точка L — середина отрезка AB.

Таким образом, множество точек плоскости $x+y+z=1$, удовлетворяющих неравенствам $0 \le z \le y \le x$, есть множество точек треугольника ALM, где M — точка пересечения медиан AK и CL треугольника ABC.

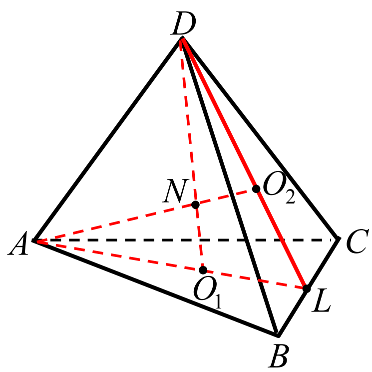
Уравнение $x^2+y^2+z^2=x$ задает сферу.[2)] Пересечением этой сферы и плоскости $x+y+z=1$ является окружность. Нетрудно видеть, что точки $A(1;0;0)$, $L(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$ и $M(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ лежат на этой окружности. Следовательно, на ней не может лежать ни одна другая точка треугольника ALM. Таким образом, решениями системы

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=x, \\ x \ge y \ge z \ge 0. \end{cases}$$

являются тройки $(1;0;0)$, $(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$ и $(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$.

2. В тетраэдре $ABCD$: AB = 8, BC = 10, AC = 12, BD = 15. Известно, что четыре отрезка, соединяющие вершины тетраэдра с центрами окружностей, вписанных в противолежащие грани, пересекаются в одной точке. Найдите длины рёбер DA и DC.

Ответ: $DA = 18$, $DC = 22{,}5$.



Решение. Пусть отрезки DO_1 и AO_2, где O_1 и O_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABC и DBC, пересекаются в точке N (см. рисунок). Тогда точки A, D, O_1 и O_2 лежат в одной плоскости, поэтому прямые AO_1 и DO_2 пересекают ребро BC в одной и той же точке L. Так как AL и DL — биссектрисы треугольников ABC и DBC, то $AB:AC = BL:CL = DB:DC$. Следовательно, $DC \cdot AB = DB \cdot AC$, откуда $DC = 15 \cdot 12 : 8 = 22{,}5$.

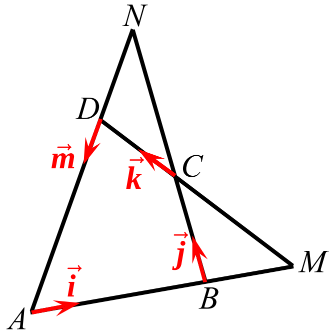
Заменив AO_2 на CO_3, где O_3 — центр вписанной окружности грани ABD, аналогично получим $DB \cdot AC = DA \cdot BC$, откуда $DA = 18$.

[1)] **В данной задаче говоря «треугольник» мы имеем в виду треугольник вместе с его внутренней областью.**

[2)] **Действительно:** $x^2+y^2+z^2=x \iff (x-0{,}5)^2+y^2+z^2=0{,}25$.

3. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, M — точка пересечения прямых AB и CD, N — точка пересечения прямых BC и AD. Докажите, что
$\cos\angle BAD + \cos\angle ABC + \cos\angle BCD + \cos\angle ADC + \cos\angle AMD + \cos\angle ANB < 2$.

Доказательство. Выберем четыре единичных вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{m}$ таких, что $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, $\vec{k} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, $\vec{m} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DA}$ (см. рисунок) и воспользуемся свойством скалярного квадрата вектора $\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}+\vec{m}\right)^2 \geq 0$.



а) Если $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}+\vec{m} = \vec{0}$, то
$AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, что противоречит условию.

б) Если $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}+\vec{m} \neq \vec{0}$, то

$$\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}+\vec{m}\right)^2 = \vec{i}^{\,2} + \vec{j}^{\,2} + \vec{k}^{\,2} + \vec{m}^{\,2} + 2\cdot\vec{i}\cdot\vec{j} + 2\cdot\vec{i}\cdot\vec{k} + 2\cdot\vec{i}\cdot\vec{m} + 2\cdot\vec{j}\cdot\vec{k} + 2\cdot\vec{j}\cdot\vec{m} + 2\cdot\vec{k}\cdot\vec{m} =$$

$$= 4 - 2\cos\angle ABC - 2\cos\angle AMD - 2\cos\angle BAD - 2\cos\angle BCD - 2\cos\angle ANB - 2\cos\angle ADC > 0,$$

откуда $\cos\angle BAD + \cos\angle ABC + \cos\angle BCD + \cos\angle ADC + \cos\angle AMD + \cos\angle ANB < 2$.

4. Найдите все тройки (p, q, r) простых чисел, для которых выполняется условие

$$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1.$$

Ответ: (7; 3; 2), (5; 3; 5), (3; 2; 7).

Решение. $\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1 \Leftrightarrow p(r+1) - 4q = q(r+1) \Leftrightarrow p(r+1) = q(r+5)$.

Так как правая часть последнего равенства делится на q, то и левая часть этого равенства делится на q. Значит, либо p делится на q (в этом случае $p = q$; $r+1 = r+5$ — противоречие), либо $(r+1)$ делится на q.

Пусть $r + 1 = kq$, $k \in N$. Тогда $pk = kq + 4$; $k(p-q) = 4$. Значит, $k = 1; 2; 4$.

1) $k = 1$. Тогда $r + 1 = q$, поэтому $r = 2$, $q = 3$. Так как $p - q = 4$, то $p = 7$.

2) $k = 2$. Тогда $r = 2q - 1$ и $p - q = 2$, т.е. $p = q + 2$.

В этом случае, если $q = 1 \pmod 3$, то $p \vdots 3$ и $p > 3$ — противоречие.

Если $q = 2 \pmod 3$, то $r \vdots 3$, $r = 3$, $q = 2$, $p = 4$ — не простое число.

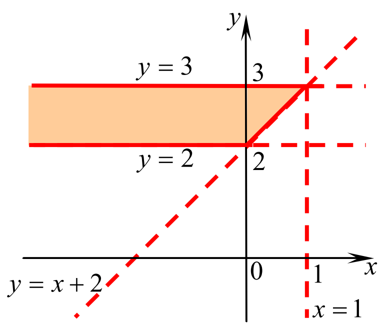
Если $q = 0 \pmod 3$, то $q = 3$, $p = 5$, $r = 5$.

3) $k = 4$. Тогда $p - q = 1$, поэтому $p = 3$, $q = 2$, $r = 4q - 1 = 7$.

5. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное неравенством

$$\sqrt{y-2} + \sqrt{y-x-2} \leq 1 + \sqrt{1-x}.$$

Решение. Фиксируем произвольное число $x \leq 1$ и рассмотрим функцию $f(y) = \sqrt{y-2} + \sqrt{y-x-2}$, область определения которой задается системой неравенств $y \geq 2$ и $y \geq x + 2$. Заметим, что функция $f(y)$ возрастает на всей области определения и $f(3) = 1 + \sqrt{1-x}$, т.е. $f(3)$ совпадает с правой частью данного неравенства. Таким образом, данное неравенство равносильно системе неравенств $x \leq 1$, $y \geq x + 2$, $2 \leq y \leq 3$, которая и задает множество, изображенное на рисунке.



6. Оцените приведенное ниже решение задачи. Укажите все ошибки и недочеты и, если они есть, доведите предложенную идею до верного рассуждения.

Задача. Найдите все трехзначные числа с различными цифрами, которые в 5 раз меньше, чем сумма всех остальных трехзначных чисел, полученных перестановкой цифр данного числа.

Решение. Пусть $x = \overline{abc}$ — искомое число, тогда перестановками его цифр можно составить еще пять трехзначных чисел. Сумма всех этих шести чисел равна $222(a+b+c)$. Согласно условию, $x = \frac{222(a+b+c)-x}{5}$, откуда $x = 37(a+b+c)$, т.е., $100a+10b+c = 37(a+b+c)$ или $7a = 3b+4c$. Переписав последнее равенство в виде $7(a-c) = 3(b-c)$, заметим, что $b-c$ делится на 7. Значит, для пары $(b;c)$ возможны только 4 значения: (1; 8), (8; 1), (2; 9) и (9; 2). Соответствующие значения a равны 5, 6, 4 и 5. Таким образом, искомые числа 518, 629, 481 и 592.

Комментарий. В решении допущена ошибка (решение неполное). Из условия задачи не следует, что все цифры искомого числа отличны от нуля, а это означает, что не все числа, получаемые перестановкой его цифр, являются трехзначными.

Верное решение. Пусть $x = \overline{abc}$ — искомое число.

Если одна из цифр этого числа равна нулю, то лишь три числа, полученные из искомого перестановкой его цифр, являются трехзначными. Далее имеем: $\overline{ab0} + \overline{a0b} + \overline{ba0} + \overline{b0a} = 211(a+b)$, и, согласно условию, $x = \frac{211(a+b)-x}{5}$, откуда $6x = 211(a+b)$, т.е., x делится на 211. Среди трехзначных чисел, кратных 211, нет чисел, в записи которых присутствует ноль.

Если все цифры искомого числа отличны от нуля, то см. приведенное выше решение.

7. Решите следующую задачу возможно большим числом способов (различными считаются способы, которые используют различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

Задача. Докажите, что для всех натуральных чисел n и k справедливо неравенство

$$(k+1)(1^k + 2^k + ... + n^k) < (n+1)^{k+1}.$$

Решение 1. Рассмотрим функцию $f(x) = x^k$ $(k > 0)$ на отрезке $[0; n+1]$. Прямоугольники, основаниями которых являются отрезки $[1;2]$; $[2;3]$; … ; $[n; n+1]$ оси абсцисс, а высоты равны, соответственно, 1^k, 2^k, …, n^k, содержатся в ее подграфике. Поэтому сумма их площадей меньше площади этого подграфика.

Таким образом,

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k < \int_0^{n+1} x^k dx = \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1}, \text{ откуда } (k+1)(1^k + 2^k + ... + n^k) < (n+1)^{k+1}.$$

Тема. «*Интеграл. Площадь криволинейной трапеции*».

Решение 2. Проведем доказательство методом математической индукции.

1. База индукции.

Для $n=1$ имеем $k+1<2^{k+1}$, что верно при любом натуральном *k*, например, в силу неравенства Бернулли.

2. Индуктивный переход.

Предположим, что $(k+1)(1^k+2^k+...+(n-1)^k)<n^{k+1}$.

Заметим также, что $(n+1)^{k+1}=n^{k+1}+(k+1)n^k+r>n^{k+1}+(k+1)n^k$, так как $r>0$.

Тогда $(k+1)(1^k+2^k+...+(n-1)^k+n^k)<n^{k+1}+(k+1)n^k<(n+1)^{k+1}$. Переход доказан.

Таким образом, неравенство $(k+1)(1^k+2^k+...+n^k)<(n+1)^{k+1}$ верно для всех натуральных чисел *n* и *k*.

Тема. «*Метод математической индукции*».

Решение 3. Воспользуемся неравенством $(l+1)^{k+1}>l^{k+1}+(k+1)l^k$ (см.решение 2), которое перепишем в виде $(l+1)^{k+1}-l^{k+1}>(k+1)l^k$. Просуммировав все такие неравенства по $l=1, 2, ..., n$, получаем

$$(n+1)^{k+1}-1=\sum_{l=1}^{n}\left((l+1)^{k+1}-l^{k+1}\right)>\sum_{l=1}^{n}(k+1)l^k=(k+1)(1^k+2^k+\ldots+n^k),$$

откуда и следует искомое неравенство.

Тема. «*Доказательство тождеств и неравенств*».