# Девятая олимпиада Эйлера для учителей математики

## Решения задач заочного тура

**1.** Решите относительно $x$ уравнение $x(x^2-3ab)=a^3+b^3$.

**Решение.** Ясно, что $x=a+b$ — корень данного уравнения. Разделив многочлен $x^3-3abx-(a^3+b^3)$ на двучлен $x-(a+b)$, приходим к квадратному уравнению $x^2+(a+b)x+(a^2-ab+b^2)=0$, дискриминант которого равен $-3(a-b)^2$. Это уравнение имеет единственный корень $x=-a$ при $b=a$ и не имеет действительных корней при $b\neq a$.

**Ответ:** а) $x_1=2a$, $x_2=-a$ при $b=a$; б) $x=a+b$ при $b\neq a$.

**2.** Решите неравенство $\arcsin 2x+\arccos(1+x)<0$.

**Решение.** Перепишем данное неравенство в виде $\arccos(1+x)<\arcsin(-2x)$. Область определения неравенства задается условиями $-1\le 2x\le 1$ и $-1\le x+1\le 1$, откуда $-\frac{1}{2}\le x\le 0$, поэтому $\frac{1}{2}\le 1+x\le 1$, $0\le -2x\le 1$. Следовательно,

$0\le \arccos(1+x)\le \frac{\pi}{3}$, $0\le \arcsin(-2x)\le \frac{\pi}{2}$. При этих условиях имеем:

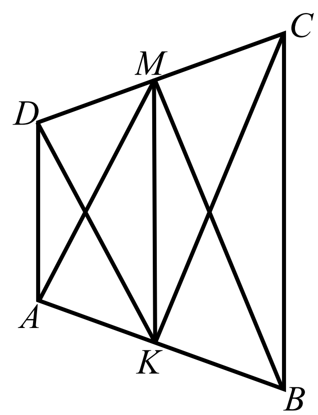
$$\arccos(1+x)<\arcsin(-2x)\Leftrightarrow \sin\left(\arccos(1+x)\right)<\sin\left(\arcsin(-2x)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-(x+1)^2}<-2x\Leftrightarrow -2x-x^2<4x^2\Leftrightarrow 5x^2+2x>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0,\\ x<-\frac{2}{5}.\end{array}\right.$$

Учитывая условие $-\frac{1}{2}\le x\le 0$, окончательно получаем $-\frac{1}{2}\le x<-\frac{2}{5}$.

**Ответ:** $\left[-\frac{1}{2};-\frac{2}{5}\right)$.

**3.** Назовем четырехугольник *равнодиагональным*, если его диагонали равны. Докажите, что, если отрезок, соединяющий середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, делит его на два равнодиагональных четырехугольника, то и четырехугольник $ABCD$ является равнодиагональным.




**Доказательство.** Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, точки $K$ и $M$ — середины его сторон $AB$ и $CD$ соответственно (см. рисунок). По условию $AM=DK$ и $BM=CK$, значит, $\Delta AMB=\Delta DKC$ по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.[*)] Тогда $AK=DM$ и $\Delta AMK=\Delta DKM$, а, следовательно, равны и высоты этих треугольников, проведенные из вершин $A$ и $D$ соответственно, значит, $AD\parallel KM$. Таким образом, $AD\parallel KM$, $AK=DM$, $AM=DK$, откуда $AKMD$ — равнобедренная трапеция или прямоугольник. Аналогично, $KBCM$ — равнобедренная трапеция или прямоугольник, а, значит и $ABCD$ — равнобедренная трапеция или прямоугольник, т.е. — равнодиагональный четырехугольник.

[*)] Указанный признак равенства треугольников легко доказать, продлив медиану на равный ей отрезок и воспользовавшись известной теоремой: «Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон».

**4.** Найдите все шестерки последовательных натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится на 7, а их сумма является точным четырехзначным квадратом.

**Решение 1.** Пусть $7n+1$, $7n+2$, $7n+3$, $7n+4$, $7n+5$, $7n+6$ — искомая шестерка чисел, тогда, согласно условию, $21(2n+1)=k^2$ (здесь $k$, $n$ — натуральные числа). Таким образом, $k$ — нечетное число, кратное 3 и 7, откуда $k^2=441(2l-1)^2$, где $l$ — также натуральное число. Учитывая условие $1000\le k^2\le 9999$, получаем $3\le(2l-1)^2\le 23$. На отрезке $[3;23]$ есть только один точный квадрат нечетного числа — число 9. Следовательно, $21(2n+1)=k^2=441\cdot 9$, $2n+1=189$, $n=94$ и искомая шестерка — 659, 660, 661, 662, 663, 664.

**Ответ:** 659, 660, 661, 662, 663, 664.

**5.** Восемь теннисистов участвуют в турнире, проводящемся по олимпийской системе. Они разбиты на четыре пары, победители которых образуют две полуфинальные пары. Победители полуфинальных пар играют финальную игру. Силы всех теннисистов равны, так что каждый из них побеждает любого другого с вероятностью $\frac{1}{2}$. Жеребьевка проведена случайным образом. Найдите вероятность того, что участвующие в этом турнире Петр и Павел встретятся друг с другом.

**Решение.** Петр встретится с Павлом в первом круге с вероятностью $\frac{1}{7}$, так как он с равной вероятностью встречается с любым из семи оставшихся теннисистов. Следовательно, вероятность того, что они не встретились в первом круге равна $\frac{6}{7}$. Поскольку каждый из них выходит в полуфинал с вероятностью $\frac{1}{2}$, вероятность того, что они оба туда попадают $\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{14}$. При условии, что они оба вышли в полуфинал, они в нем встретятся с вероятностью $\frac{1}{3}$, а не встретятся с вероятностью $\frac{2}{3}$. Значит, вероятность их встречи в полуфинале равна $\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{14}$, а вероятность того, что они оба вышли в финал, равна $\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{28}$. Таким образом, вероятность того, что Петр и Павел сыграют друг с другом равна $\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{1}{4}$.

**Ответ:** $\frac{1}{4}$.

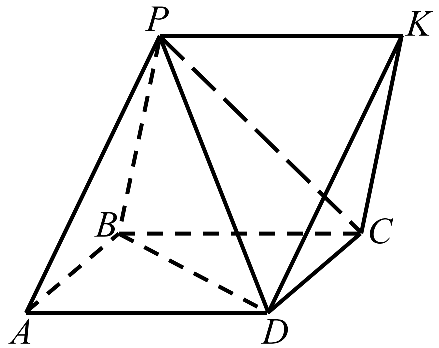
**6.** Известно, что значение многочлена $p(x)$, коэффициенты которого — целые числа, равно 5 в пяти различных целых точках. Докажите, что не существует целого числа $k$, такого, что значение $p(k)$ этого многочлена лежит в одном из отрезков $[-6;4]$ или $[6;16]$.

**Решение.** Введем многочлен $q(x)=p(x)-5$. Из условия следует, что его корнями являются пять различных целых чисел $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$, откуда следует, что $q(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_5)s(x)$, где $s(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, не имеющий корней. Следовательно, для любого целого числа $k$ справедливо неравенство $|s(k)|\ge 1$.

Для любого целого числа $k$, отличного от корней многочлена $q(x)$, разности $k-x_i$, $i=1,2,\ldots,5$, являются различными отличными от нуля целыми числами. Поэтому для их произведения верно неравенство $\left|(k-x_1)(k-x_2)\ldots(k-x_5)\right|\geq 12$. Таким образом, для произвольного целого числа $k$ имеем: $\left|q(k)\right|\geq 12$ или $q(k)=0$. Значит, число $q(k)$ не может лежать в отрезках $[-11;-1]$ и $[1;11]$, а значение $p(k)$ исходного многочлена — в отрезках $[-6;4]$ и $[6;16]$.

**7.** В основании пирамиды объема $V$ лежит параллелограмм. Длины боковых ребер этой пирамиды различны и отличны от длин ребер ее основания. Найдите объем треугольной пирамиды, составленной из боковых граней данной пирамиды.

**Решение.** Пусть $PABCD$ — данная пирамида (см. рисунок). Построим в плоскости $PBC$ отрезок $PK$, параллельный и равный отрезку $BC$. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то отрезок $PK$ также параллелен и равен отрезку $AD$. Тогда $PKCB$ — параллелограмм, значит, $KC = PB$ и $PKDA$ — также параллелограмм, поэтому, $PA = KD$. Таким образом, $\Delta PKC = \Delta PBC$; $\Delta PKD = \Delta PAD$; $\Delta KCD = \Delta PBA$, и, значит, $PKCD$ — искомая треугольная пирамида.




Высоты, проведенные в пирамидах $PKCD$ и $PBCD$ из вершины $D$, совпадают, а основания $PKC$ и $PBC$ равны, следовательно, $V_{PKCD} = V_{PBCD}$. Так как $V_{SBCD} = 0{,}5V$, то $V_{SKCD} = 0{,}5V$.

**8.** Хорошо известны три основных свойства расстояния:

1) $|AB|>0$, если $A$ и $B$ — различные точки и $|AB|=0$, если точки $A$ и $B$ совпадают;

2) $|AB|=|BA|$;

3) $|AC|\leq|AB|+|BC|$.

Докажем, что третье свойство может быть выведено из первых двух.

**Доказательство.** Предположим, что $|AC|>|AB|+|BC|$. Так как $A$, $B$, $C$ — любые три точки, то пусть, например, точки $A$ и $B$ совпадают, а точка $C$ отлична от них. Тогда, с одной стороны, $|AB|=0$, откуда $|AC|>|BC|$, а, с другой стороны, $|AC|=|BC|$. Получено противоречие, значит, предположение неверно. Следовательно, $|AC|\leq|AB|+|BC|$, что и требовалось доказать.

**Комментарий.** В приведенном рассуждении сделана логическая ошибка. Для того, чтобы она была ясно видна, сформулируем свойство 3 более формально, а именно: «Для любых точек $A$, $B$ и $C$ выполняется условие $|AC|\leq|AB|+|BC|$». Рассуждение проводится «от противного». Отрицанием свойства 3 является утверждение «Существуют точки $A$, $B$ и $C$ такие, что $|AC|>|AB|+|BC|$». Таким образом, мы не имеем права предполагать, что какие-то две точки совпадают.

**9.** Решите уравнение. $\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{x^2-1}$.

**Решение.** На множестве $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$ имеем:

$$\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x^2-1}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-1)(x+3)} + \sqrt{(x-1)(x+2)} - \sqrt{(x-1)(x+1)} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x+1} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

(Второе уравнение не имеет решений, так как при любом значении $x$ каждое слагаемое левой части уравнения больше его правой части)

**Ответ:** $\{1\}$.

**Комментарий.** Приведенные преобразования равносильны только на множестве $[1;+\infty)$. На множестве $(-\infty;-3]$ имеем:

$$\sqrt{x^2+2x-3} + \sqrt{x^2+x-2} - \sqrt{x^2-1} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(-x+1)(-x-3)} + \sqrt{(-x+1)(-x-2)} - \sqrt{(-x+1)(-x-1)} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x}\left(\sqrt{-x-3} + \sqrt{-x-2} - \sqrt{-x-1}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{-x-3} + \sqrt{-x-2} = \sqrt{-x-1} \;\Leftrightarrow\; -2x-5+2\sqrt{x^2+5x+6} = -x-1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x^2+5x+6} = x+4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x^2+12x+8=0, \\ -4 \le x \le -3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \; x = -2-\tfrac{2\sqrt{3}}{3}.$$

**Верный ответ:** $\left\{-2-\tfrac{2\sqrt{3}}{3};\, 1\right\}$.

**10.** Первый член арифметической прогрессии равен 1, а ее разность — натуральное число. Может ли сумма первых 24 членов данной прогрессии быть равна $317$?

**Решение 1.** Если $d=1$, то $S_{24} = \frac{1+24}{2}\cdot 24 = 300$, а если $d \ge 2$, то $S_{24} \ge \frac{1+47}{2}\cdot 24 = 48\cdot 12 > 317$. Таким образом, сумма первых 24 членов данной прогрессии не может быть равна 317.

Тема. «**Арифметическая прогрессия**»

**Решение 2.** Если разность данной прогрессии четна, то все 24 члена этой прогрессии нечетны. Если же разность данной прогрессии нечетна, то 12 ее членов нечетны, а 12 четны. И в том, и в другом случае сумма первых 24 членов данной прогрессии четна, а, значит, не может равняться 317.

Тема. **«Четность»**

**Решение 3.** Поскольку все члены данной прогрессии — целые числа, то сумма первых 24 ее членов $S_{24} = 12(a_1 + a_{24})$ делится на 12 и, следовательно, не может равняться 317.

Тема. **«Делимость»**

**11.** Решите уравнение $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}=3$.

**Решение 1.** Пусть $a=\sqrt[4]{1+x}$, $b=\sqrt[4]{1-x}$, $a,\ b\ge 0$, тогда $a^4+b^4=2$. В силу неравенства $\frac{a+b}{2}\le\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}$ отсюда следует, что $\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}\le 2$. Так как $\sqrt[4]{1-x^2}\le 1$ и равенство имеет место только при $x=0$, то при всех $x\ne 0$ левая часть данного уравнения меньше 3. Следовательно, единственным решением данного уравнения является $x=0$.

Тема. «**Доказательство неравенств**»

**Решение 2.** Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}$.

Имеем: $f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{(1+x)^3}}-\frac{1}{4\sqrt[4]{(1-x)^3}}=\frac{\sqrt[4]{(1-x)^3}-\sqrt[4]{(1+x)^3}}{4\sqrt[4]{(1-x^2)^3}}$. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-1;1]$, и $f'(x)>0$ при $x\in(-1;0)$, $f'(x)<0$ при $x\in(0;1)$. Значит, эта функция возрастает на отрезке $[-1;0]$ и убывает на отрезке $[0;1]$. Поскольку функция $y=\sqrt[4]{1-x^2}$ также возрастает на отрезке $[-1;0]$ и убывает на отрезке $[0;1]$, то так же себя ведет и функция $g(x)=\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}$. Таким образом, $\max\limits_{[-1;1]} g=g(0)=3$ и, следовательно, $x=0$ является единственным корнем данного уравнения.

Тема. «**Производная. Исследование функций**»

**Решение 3.** Пусть $a=\sqrt[4]{1+x}$, $b=\sqrt[4]{1-x}$, $a,\ b\ge 0$, тогда $a^4+b^4=2$ и $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}=ab+a+b=3$. Положим $u=a+b,\ v=ab$, где $v\le 1,\ u\ge 2.$

Поскольку $a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2=\left(\left(a+b\right)^2-2ab\right)^2-2a^2b^2=$

$$=\left(a+b\right)^4-4\left(a+b\right)^2ab+2a^2b^2=u^4-4u^2v+2v^2=2,$$

получаем систему уравнений $\begin{cases} u+v=3, \\ u^4-4u^2v+2v^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3-u, \\ u^4-4u^2\left(3-u\right)+2\left(3-u\right)^2=2. \end{cases}$

Так как у второго уравнения $u^4+4u^3-10u^2-12u+16=0$ один из корней равен 2, оно равносильно уравнению $\left(u-2\right)\left(u^3+6u^2+2u-8\right)=0.$ Поскольку $f(u)=u^3+6u^2+2u$ — возрастающая функция и $f(0)<8$, а $f(1)>8$, единственный корень уравнения $u^3+6u^2+2u=8$ лежит в промежутке $\left(0;\ 1\right)$ и нам не подходит. Таким образом, $\begin{cases} u=2, \\ v=1, \end{cases}$ откуда $a=b=1$, и исходное уравнение имеет единственный корень $x=0.$

Тема. «**Симметрические многочлены**»

**12.** Пусть $\alpha, \beta > 0$ и $\alpha + \beta = 1$. Докажите, что для любых положительных чисел $x$ и $y$ справедливо неравенство $x^{\alpha} y^{\beta} \le \alpha x + \beta y$.

**Решение 1.** Фиксируем произвольное положительное число $y$ и рассмотрим функцию $f(x) = x^{\alpha} y^{\beta} - \alpha x - \beta y$.

Ее производная $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} - \alpha = \alpha x^{-\beta} y^{\beta} - \alpha = \alpha\left(\left(\frac{y}{x}\right)^{\beta} - 1\right)$ обращается в ноль при $x = y$, положительна при $x < y$ и отрицательна при $x > y$.

Следовательно, $f(x) \le f(y) = y^{\alpha} \cdot y^{\beta} - \alpha y - \beta y = y^{\alpha+\beta} - y(\alpha + \beta) = y - y = 0$, откуда и следует доказываемое утверждение.

Тема. **«Применение производной для доказательства неравенств»**

**Решение 2.** Неравенство $x^{\alpha} y^{\beta} \le \alpha x + \beta y$ при $x, y, \alpha, \beta > 0$ и $\alpha + \beta = 1$ представляет собой известное *неравенство между взвешенными средними арифметическим и геометрическим*.

Тема. **«Неравенства. Теоремы о средних»**

**Решение 3.** Поделив обе части неравенства $x^{\alpha} y^{\beta} \le \alpha x + \beta y$ на $x$ и воспользовавшись тем, что $1 - \alpha = \beta$, получаем равносильное неравенство $\left(\frac{y}{x}\right)^{\beta} \le 1 + \beta\left(\frac{y}{x} - 1\right)$. После замены $t = \frac{y}{x}$ приходим к неравенству $t^{\beta} \le 1 + \beta(t - 1)$. Согласно условию $0 < \beta < 1$, следовательно, функция $f(t) = t^{\beta}$ выпукла вверх, а, значит, график этой функции расположен ниже любой ее касательной. Осталось заметить, что $y = 1 + \beta(t - 1)$ — уравнение касательной к графику функции $f(t) = t^{\beta}$ в его точке с абсциссой $t = 1$.

Тема. **«Производная. Уравнение касательной»**

**Решение 4.** Прологарифмировав обе части неравенства $x^{\alpha} y^{\beta} \le \alpha x + \beta y$, получаем равносильное неравенство $\alpha \ln x + \beta \ln y \le \ln(\alpha x + \beta y)$. Рассмотрим хорду $AB$ графика функции $f(t) = \ln t$ с концами в точках $A(x; \ln x)$ и $B(y; \ln y)$. Точка с координатами $(\alpha x + \beta y; \alpha \ln x + \beta \ln y)$ принадлежит этой хорде. Поскольку функция $f(t) = \ln t$ выпукла вверх, ордината любой точки хорды не больше значения функции в точке с той же абсциссой, откуда и следует $\alpha \ln x + \beta \ln y \le \ln(\alpha x + \beta y)$.

Тема. **«Свойства выпуклых функций»**

**Замечание.** Неравенство $\alpha \ln x + \beta \ln y \le \ln(\alpha x + \beta y)$ представляет собой известное *неравенство Йенсена* для выпуклой вверх функции.

**Решение 5.** Если положить $a = x^{\alpha}$, $b = y^{\beta}$, $p = \frac{1}{\alpha}$ и $q = \frac{1}{\beta}$, то данное неравенство приобретает вид $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, где $p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Последнее неравенство известно как *неравенство Юнга*. Его доказательство, основанное на использовании определенного интеграла, приведено, например, в книге О.А.Иванова «Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей» (стр.172)

Тема. **«Неравенства»**