Решение задач очного тура седьмой олимпиады Эйлера

1. Найдите все значения *c*, при каждом из которых имеет решение система

$$\begin{cases} x(y+z)=20, \\ y(x+z)=13, \\ z(x+y)=c. \end{cases}$$

Ответ: $c<-7$ или $7<c<33$.

Решение. Так как $xy+xz=20$, $xy+yz=13$, $xz+yz=c$, то $xy+yz+xz=\frac{33+c}{2}$, откуда $xy=\frac{33-c}{2}$, $yz=\frac{c-7}{2}$, $xz=\frac{c+7}{2}$. Следовательно, $x^2y^2z^2=\frac{(c-7)(c+7)(33-c)}{8}$.

Если это произведение равно нулю, то *c* не равно нулю (*c* в этом случае либо равно 7, либо -7, либо 33), а хотя бы одно из значений *x*, *y* и *z* равно нулю, что противоречит условиям.

Если $(c-7)(c+5)(33-c)>0$, то $c<-7$ или $7<c<33$. Для каждого такого значения *c* находятся два значения произведения *xyz* и, затем, соответствующие значения неизвестных.

2. Решите в целых числах уравнение $4^{n-1}+7\cdot 2^n+48=n!$

Ответ: $n=7$.

Решение. При любом целом n левая часть уравнения больше 48, значит $n!>48$, откуда $n\ge 5$. При $n=5$ левая часть уравнения больше $5!=120$. При $n=6$ левая часть уравнения больше $2^{10}=1024>720=6!$. При $n=7$ получаем

$$4^6+7\cdot 2^7+48=4096+896+48=5040=7!$$

Таким образом, $n=7$ является решением.

Осталось заметить, что при $n\ge 8$ уравнение решений не имеет, так как правая часть делится на 2^7, а левая — только на 2^4.

3. Докажите, что существует треугольная пирамида, площади граней которой равны 3, 4, 5 и 10.

Доказательство. Рассмотрим пирамиду *PABC*, вершина *P* которой проектируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды. В такой пирамиде равны двугранные углы при ее основании и высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды. Пирамида *PABC* удовлетворяет заданным условиям, если площадь ее основания равна 10, длины стороны основания относятся как 3:4:5, а косинус двугранного угла при основании пирамиды равен отношению площади основания к площади боковой поверхности, т.е. $\cos\alpha=\frac{10}{3+4+5}=\frac{5}{6}$. Длины сторон основания 3*x*, 4*x* и 5*x* находим из условия $\frac{3x\cdot 4x}{2}=10$, откуда $x=\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Таким образом, пирамида, основание которой прямоугольный треугольник со сторонами $3\sqrt{\frac{5}{3}}$, $4\sqrt{\frac{5}{3}}$ и $5\sqrt{\frac{5}{3}}$, и все двугранные углы при основании которой равны $\arccos\frac{5}{6}$, удовлетворяет заданным условиям.

4. Докажите, что существует такое натуральное число n, что $\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\} > 0{,}999$ (здесь $\{a\}$ — дробная часть числа a).

Доказательство. Пусть $x = 2+\sqrt{3}$. Тогда $2-\sqrt{3} = \frac{1}{x}$, поэтому $x + \frac{1}{x} = 4$.

Известно, что в этом случае для любого натурального n число $x^n + \frac{1}{x^n}$ также является натуральным (см. также **Замечание**). Выберем n так, чтобы $\frac{1}{x^n} < 0{,}001$.

Так как целая часть числа x^n равна $x^n + \frac{1}{x^n} - 1$, то его дробная часть равна $1 - \frac{1}{x^n} > 0{,}999$. В заключение заметим, что $\left(2+\sqrt{3}\right)^6 = 2701{,}99962\ldots$.

Замечание. Раскрывая скобки в выражениях $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ и $\left(2-\sqrt{3}\right)^n$, заметим, что слагаемые обеих сумм, содержащие $\sqrt{3}$ в четной степени, равны, а слагаемые, содержащие $\sqrt{3}$ в нечетной степени, противоположны. Следовательно, числа $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ и $\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ являются сопряженными, а, значит, их сумма — натуральное число.

5. Пусть A_0 — множество всех степеней числа 2**:** $1, 2, 4, \ldots$**;** A_1 — множество натуральных чисел, являющихся серединами отрезков с концами в точках множества A_0 (в том числе — вырожденных отрезков, так что A_1 содержит A_0)**;** A_2 — множество натуральных чисел, являющихся серединами отрезков с концами в точках множества A_1 (в том числе — вырожденных отрезков, так что A_2 содержит A_1). И так далее. Найдите наименьшее k такое, что число 1001 лежит в множестве A_k.

Ответ: $k = 3$.

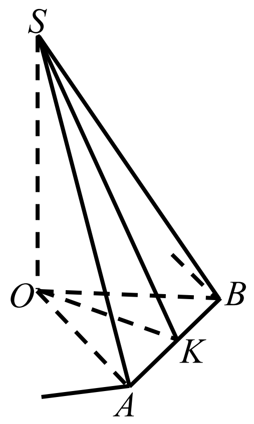
Решение. Множество A_0 состоит из чисел, в двоичной записи которых присутствует ровно одна единица. Так как $\frac{2^k + 2^n}{2} = 2^{k-1} + 2^{n-1}$, то множество A_1 состоит в точности из тех чисел, в двоичной записи которых имеется не более двух единиц. И так далее: в двоичной записи чисел из A_2 не более 4 единиц, в двоичной записи чисел из A_3 не более 8 единиц, в двоичной записи чисел из A_k не более 2^k единиц. Так как $1001_{10} = 1111101001_2$, то это число содержит 7 единиц, т.е. не входит в множество A_2, но входит в множество A_3.

6. Класс получил задание придумать задачу на свойства правильной пирамиды и привести собственное решение этой задачи. Оцените следующее выполнение этого задания одним из учащихся:

Задача. *Дана правильная пятиугольная пирамида SABCDE. Боковое ребро пирамиды равно* 10, *угол при вершине боковой грани пирамиды равен* $30°$, *а угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости ее основания равен* $60°$. *Найдите площадь основания пирамиды.*

Решение. Площадь боковой грани ASB равна $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cdot \sin 30^\circ = 25$. Пусть проекцией вершины S на плоскость основания является точка O. Тогда $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ASB}\cdot \cos 60^\circ = 12,5$, и, значит, площадь основания пирамиды равна 62,5.

Ответ: 62,5..



Комментарий. С заданием учащийся не справился, поскольку не существует правильной пятиугольной пирамиды с приведенными данными. Дело в том, что задание бокового ребра и любого из заданных учеником углов однозначно определяет эту пирамиду. Таким образом, задание еще одного угла либо является лишним, либо приводит к противоречию. В данном случае имеет место противоречие.

Действительно (см. рисунок):

1) из треугольника SBK: $BK = SK\,\mathrm{tg}\,15^\circ$; (1)

2) из треугольника SOK: $OK = \frac{1}{2}SK$;

3) из треугольника BOK: $BK = OK\,\mathrm{tg}\,36^\circ = \frac{1}{2}SK\,\mathrm{tg}\,36^\circ$. (2)

Равенство (2) противоречит равенству (1), так как

$$\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,36^\circ > \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{\mathrm{tg}\,15^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,15^\circ} > \mathrm{tg}\,15^\circ.$$

7. Решите следующую задачу возможно большим числом способов (различными считаются способы, использующие различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

Задача. Найдите наименьшую площадь треугольника, отсекаемого от первого координатного угла прямой, проходящей через точку $A(1;2)$.

Ответ: 4.

Решение 1. Рассмотрим проходящий через точку A отрезок с концами в точках $K(t;0)$ и $L(0;z)$, где, очевидно, $t>1$, $z>2$. (см. рисунок 1). Треугольники OKL и MAL подобны, откуда $\frac{z-2}{z}=\frac{1}{t}$ и $z=\frac{2t}{t-1}$. Площадь треугольника OKL определяется формулой $s(t)=\frac{t^2}{t-1}$. Найдем наименьшее значение этой функции на множестве $(1;+\infty)$ двумя способами.

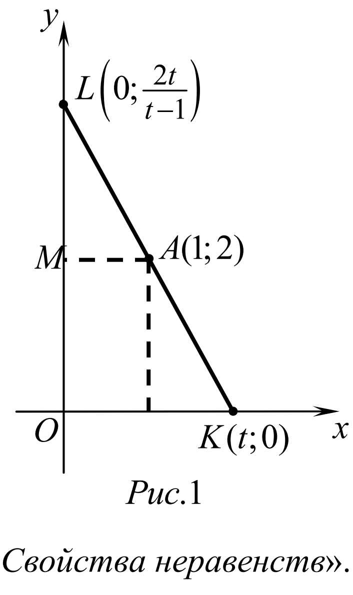


*Рис.*1

1а. Так как $s(t)=\frac{t^2-1+1}{t-1}=t+1+\frac{1}{t-1}=\left(t-1+\frac{1}{t-1}\right)+2\ge 4$ и $s(2)=4$, то 4 — наименьшее значение функции $s(t)$.

Тема. «*Свойства неравенств*».

1b. Так как $s'(t)=\frac{t^2}{t-1}=\frac{2t(t-1)-t^2}{(t-1)^2}=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$, то функция $s(t)$ убывает на промежутке $(1;2]$ и возрастает на промежутке $[2;+\infty)$. Поэтому ее наименьшим значением является $s(2)=4$.

Тема. «*Исследование функции с помощью производной*».

Решение 2. Пусть прямая, проходящая через точку *A*, пересекает оси координат в точках $(a;0)$ и $(0;b)$. Уравнение этой прямой имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Поскольку эта прямая проходит через точку (1; 2), то $1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{ab}}$, откуда $\sqrt{ab}\ge 2\sqrt{2}$ и, значит, $s=\frac{ab}{2}\ge 4$. Осталось заметить, что при $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{1}{2}$ мы и получаем треугольник площади 4.

Темы. «*Уравнение прямой*», «*Теоремы о средних*».

Решение 3. Докажем, что если точка *A* является серединой отрезка *KL*, концы которого лежат на координатных осях, то площадь треугольника *OKL* является наименьшей.

Рассмотрим любой другой отрезок с концами на осях координат, проходящий через точку *A* (отрезки K_1L_1 и K_2L_2 на рисунке 2).

Если точка K_1 расположена между точками *O* и *K* (отрезок K_1L_1), то площадь треугольника ALL_1 больше площади треугольника AKK_1, т.к. $AL=AK$, а $AL_1>AK_1$. Значит, площадь треугольника OK_1L_1 больше площади треугольника *OKL*.

Если точка *K* расположена между точками *O* и K_2 (отрезок K_2L_2), то, аналогично, площадь треугольника AKK_2 больше площади треугольника ALL_2, значит, площадь треугольника OK_2L_2 и в этом случае больше площади треугольника *OKL*.

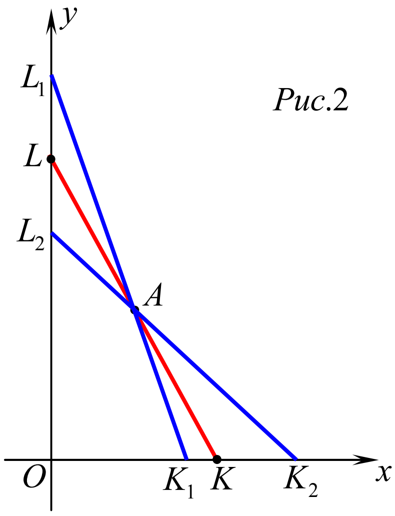


*Рис.*2

Тема. «*Свойства площадей*».

Решение 4. Пусть прямая, проходящая через точку *A*, пересекает оси координат в точках $(a;0)$ и (см. рисунок 3). Тогда, с одной стороны, $s=\frac{ab}{2}$, а, с другой стороны, $s=a+\frac{b}{2}=\frac{2a+b}{2}$. Значит, $2a+b=ab$. Так как $2a+b\ge 2\sqrt{2ab}$, то $ab\ge 2\sqrt{2ab}$, откуда $s=\frac{ab}{2}\ge 4$. Равенство достигается при $a=2$, $b=4$.

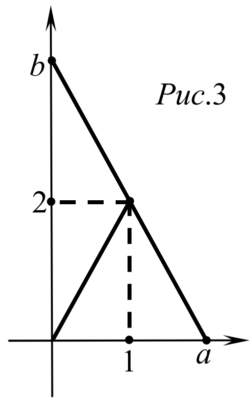


*Рис.*3

Темы. «*Свойства площадей*», «Теоремы о средних».