Седьмая олимпиада Эйлера для учителей математики

Решения задач заочного тура

1. Докажите, для любых неотрицательных чисел a, b и c выполняется неравенство $6a+4b+5c \ge 5\sqrt{ab}+7\sqrt{ac}+3\sqrt{bc}$.

Решение. Сложив почленно три известных неравенства: $5a+5b\ge 10\sqrt{ab}$, $7a+7c\ge 14\sqrt{ac}$ и $3b+3c\ge 6\sqrt{bc}$ и поделив затем обе части полученного неравенства на 2, получаем требуемое неравенство.

2. Существуют ли различные четные натуральные числа a, b, c и d такие, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2013}$?

Решение 1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$, следовательно $\frac{1}{2\cdot 2013}+\frac{1}{4\cdot 2013}+\frac{1}{6\cdot 2013}+\frac{1}{12\cdot 2013}=\frac{1}{2013}$.

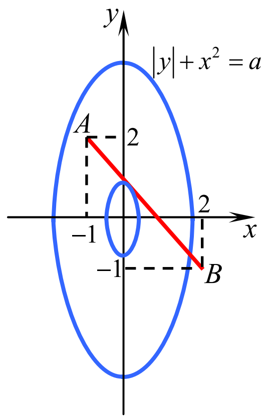
Решение 2. $\frac{1}{2013}=\frac{1}{3\cdot 11\cdot 61}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{11x}+\frac{1}{61x}=\frac{2900}{2013x}$. Таким образом, при $a=2900$, $b=2900\cdot 3$, $c=2900\cdot 11$, $d=2900\cdot 61$ получаем $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2013}$.

Ответ: да, существуют.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=3\sqrt{2},\\ |y|+x^2=a.\end{cases}$$

имеет единственное решение.



Решение. График первого уравнения — отрезок с концами в точках $A(-1;2)$ и $B(2;-1)$. Множеством искомых значений параметра a являются либо промежуток $(a_1;a_2]$, где a_1 и a_2 — те значения a, при которых графики уравнений $y+x^2=a$ и $-y+x^2=a$ проходят соответственно через точки $A(-1;2)$ и $B(2;-1)$, либо значение $a=a_3$, где a_3 — то значения a, при котором прямая AB $(y=-x+1)$ касается графика уравнения $y+x^2=a$ (см. рисунок).

Таким образом:

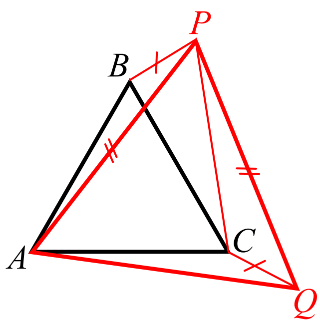
1) $a_1=2+1=3$;

2) $a_2=1+4=5$;

3) $-x+1=-x^2+a_3 \Leftrightarrow x^2-x+1-a_3=0$; $D=1-4(1-a_3)=4a_3-3=0$; $a_3=0,75$.

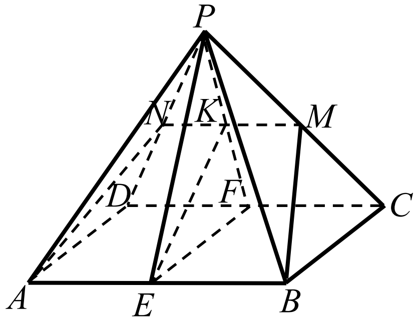
Ответ: $3<a\le 5$. $a=0,75$.

4. Пусть A, B и C — вершины равностороннего треугольника, P — произвольная точка в плоскости этого треугольника. Докажите, что $AP\le BP+CP$.



Решение. Рассмотрим поворот на $60°$ градусов вокруг точки A, переводящий точку B в точку C. Пусть при этом точка P переходит в точку Q. Так как треугольник APQ — равносторонний, то $AP = PQ$, а так как точка B перешла в точку C, а точка P перешла в точку Q, то $BP = CQ$. Осталось применить неравенство треугольника к треугольнику CPQ. Равенство выполняется в том случае, когда точка P лежит на дуге окружности, описанной около треугольника ABC.

5. В правильной четырехугольной пирамиде косинус угла между противоположными боковыми гранями равен $\frac{8}{9}$. Найдите сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через ребро основания, площадь которого является наибольшей.



Решение. Пусть $PABCD$ — данная пирамида, трапеция $ABMN$ — сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через ребро AB, ΔPEF — ее сечение плоскостью, проходящей через апофемы PE и PF, точка K — точка пересечения прямых MN и PF (см. рисунок). Положим $AB = 2$, $MN = 2x$, $PE = d$, $EK = h$. Тогда площадь сечения S равна $S = (x+1)h$.

Поскольку $\cos\angle EPF = \frac{8}{9}$, из треугольника EPF получаем $d = 3\sqrt{2}$. Далее имеем $\frac{PK}{PF} = \frac{MN}{CD}$, откуда $PK = xd = 3\sqrt{2}x$. Из треугольника PKE находим $h = \sqrt{2(9x^2 - 16x + 9)}$. Значит, $S = (x+1)\sqrt{2(9x^2 - 16x + 9)}$.

Исследуя функцию $f(x) = (x+1)^2(9x^2 - 16x + 9)$ на отрезке [0; 1], находим точки ее экстремумов: $x = \frac{5-\sqrt{17}}{12}$ — точка максимума, $x = \frac{5+\sqrt{17}}{12}$ — точка минимума.

Наибольшее значение этой функции достигается либо в точке $x = \frac{5-\sqrt{17}}{12}$, либо при $x = 1$. Однако, поскольку $f(0) > f(1)$, наибольшим является значение $f\left(\frac{5-\sqrt{17}}{12}\right)$.

Ответ: Сечение, делящее боковые ребра в отношении $\frac{x}{1-x} = \frac{5-\sqrt{17}}{7+\sqrt{17}} = \frac{13-3\sqrt{17}}{8}$.

6. Числа a, b, c — целые, по модулю не превосходящие 10. Кубический многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ удовлетворяет условию $\left|f(2+\sqrt{3})\right| < 0{,}0001$. Является ли число $2+\sqrt{3}$ корнем данного многочлена?

Решение. Значение $f\left(2+\sqrt{3}\right)$ имеет вид $A + B\sqrt{3}$, где A и B – целые числа, и при этом $\left|A + B\sqrt{3}\right| < 0{,}0001$. По условию a, b, c — числа, по модулю не превосходящие 10, откуда следует, что $\left|A - B\sqrt{3}\right| < 10000$. Получаем, $\left|A^2 - 3B^2\right| < 1$, что возможно тогда и только тогда, когда $A = B = 0$. Таким образом, $f\left(2+\sqrt{3}\right) = 0$.

Ответ: Да, является.

7. Докажите, что не существует функции $f(x)$, заданной и непрерывной на всей числовой прямой и не равной тождественно нулю, для которой при всех $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо тождество $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$.

Решение. Предположим, что такая функция существует. Подставив $x = y = 0$ в данное соотношение, получим $f(0) = \frac{2f(0)}{1-f^2(0)}$, откуда $f(0) = 0$, поскольку $\frac{2}{1-f^2(0)} \neq 1$. Ясно, что данная функция — нечетная. Значений, больших по модулю 1, она принимать не может, так как тогда в силу ее непрерывности в некоторой точке a она была по модулю равна 1, но тогда в точке $2a$ эта функция бы не существовала, так как $f(2a) = \frac{2f(a)}{1-f^2(a)}$.

Предположим, что значение функции $f(x)$ в некоторой точке a лежит между 0 и 1. Тогда $f(2a)=\dfrac{2f(a)}{1-f^2(a)}>2f(a)$. Применив метод математической индукции, получаем $f(2^k a)>2^k f(a)$ для любого $k\in\mathbb{N}$, что невозможно, так как значений, больших 1, эта функция не принимает.

8. Задача. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=4, \\ x^2+xz+z^2=9, \\ y^2+yz+z^2=36. \end{cases}$$

Ответ: Система решений не имеет.

Решение. Выберем точку O в некоторой плоскости и отложим в этой плоскости три отрезка: $OA=x$, $OB=y$ и $OC=z$ так, что $\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC=120^\circ$. Из треугольника AOB по теореме косинусов находим:

$AB^2=x^2+y^2-2xy\cos120^\circ=x^2+xy+y^2$. По условию $x^2+xy+y^2=4$, значит $AB=2$.

Аналогично, из треугольников AOC и BOC получаем $AC=3$, $BC=6$.

Таким образом, для треугольника ABC не выполняется неравенство треугольника.

Комментарий. Из условия не следует, что x, y, z — положительные числа.

Верное решение. Выберем точку O в некоторой плоскости и отложим в этой плоскости от точки O три единичных вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$, которые образуют друг с другом углы 120°. Пусть x, y, z — решения данной системы. Обозначим соответственно через A, B и C концы векторов $x\vec{u}$, $y\vec{v}$ и $z\vec{w}$. Далее имеем:

$AB^2=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)^2=(y\vec{v}-x\vec{u})^2=x^2+y^2-2xy\cos120^\circ=x^2+xy+y^2=4$, откуда $AB=2$.

Аналогично, получаем: $AC=3$, $BC=6$.

Таким образом, $AB+AC<BC$, что противоречит неравенству треугольника.

9. Задача. Две окружности радиусов 4 и 8 касаются в точке A. Через точку A проведена прямая, пересекающая большую окружность в точке B, а меньшую — в точке C. Найдите AB, если известно, что $BC=6\sqrt{2}$.

Ответ: $4\sqrt{2}$, $12\sqrt{2}$.

Решение. Обозначим через O и Q центры меньшей и большей окружностей соответственно.

Случай 1. Внешнее касание (см. рисунок 1).

Треугольники AQB и AOC — равнобедренные и $\angle BAQ=\angle CAO$, следовательно, эти треугольники подобны, причем коэффициент подобия k равен отношению радиусов окружностей, описанных около треугольников, т.е. $k=2$.

Таким образом, $AB=2AC=\dfrac{2}{3}BC=4\sqrt{2}$.

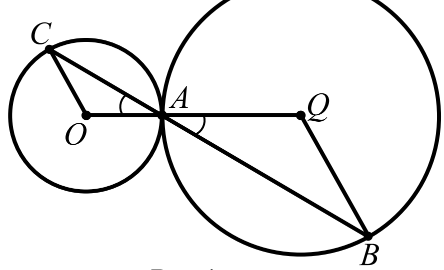


*Рис.*1

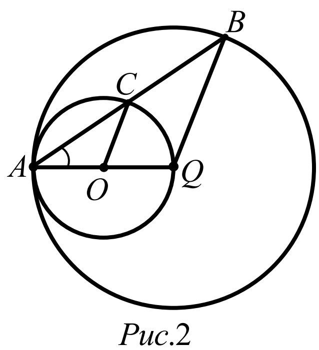


*Рис.*2

Случай 2. Внутреннее касание (см. рисунок 2).

Аналогично случаю 1, треугольники AQB и AOC подобны, и коэффициент подобия этих треугольников равен 2, откуда $AB = 2AC = 2BC = 12\sqrt{2}$.

Комментарий. Во втором случае хорда больше диаметра, т.е. внутреннее касание при заданных условиях невозможно.

Верный ответ: $4\sqrt{2}$.

10. Задача. Решите уравнение $1 + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4})$.

Ответ: $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Решение. $1+\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Комментарий. Неверно, что $1 + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}$, т.к. левая и правая части формулы $\operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}$ имеют различные области определения.

При переходе от уравнения $1 + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4})$ к уравнению $1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}$ возможна потеря решений $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Проверка показывает, что значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют исходному уравнению.

Верный ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

11. Докажите, что если $0 \le a, b, c \le 1$, то $0 \le a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) \le 1$.

Решение 1. При условии $0 \le a, b, c \le 1$ левая часть доказываемого двойного неравенства очевидна. Из этого же условия следует, что $(1-a)(1-b)(1-c) \ge 0$, откуда получаем: $1 - a - b - c + ab + bc + ac - abc \ge 0$, $a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) \le 1 - abc \le 1$.

Решение 2. Заметим, что $a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) = (1-b-c)a + (b+c-bc)$ и рассмотрим линейную функцию $f(a) = (1-b-c)a + (b+c-bc)$ на отрезке $[0; 1]$:

а) $f(0) = b + c - bc = 1 - (1 - b + bc - c) = 1 - (1-b)(1-c)$. Поскольку $0 \le 1 - b \le 1$ и $0 \le 1 - c \le 1$, то $0 \le (1-b)(1-c) \le 1$, а, значит, и $0 \le 1 - (1-b)(1-c) \le 1$, т.е., $0 \le f(0) \le 1$.

б) $f(1) = 1 - b - c + b + c - bc = 1 - bc$. Так как $0 \le bc \le 1$, то и $0 \le 1 - bc \le 1$, т.е., $0 \le f(1) \le 1$.

Так как линейная функция монотонна, то $0 \le f(a) \le 1$ для любого $a \in [0;1]$.

Решение 3. Заметим, что, если хотя бы одно из чисел a, b и c равно нулю или единице, то неравенство выполняется.

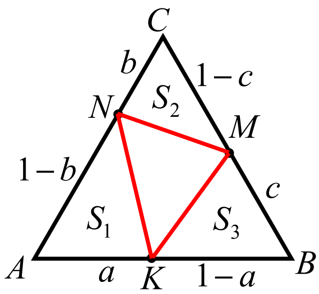
Действительно:

Если $a = 0$, то $a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) = b + c - bc = 1 - (1 - b + bc - c) = 1 - (1-b)(1-c)$. Так как $0 \le 1 - b \le 1$ и $0 \le 1 - c \le 1$, то $0 \le (1-b)(1-c) \le 1$, а, следовательно, и $0 \le 1 - (1-b)(1-c) \le 1$.

Если $a = 1$, то $a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) = 1 - b + b - bc = 1 - bc$. Так как $0 \le bc \le 1$, то и $0 \le 1 - bc \le 1$.

Пусть теперь $0 < a, b, c < 1$.

Рассмотрим правильный треугольник ABC со стороной, равной 1. Отложим на сторонах AB, BC и CA этого треугольника соответственно отрезки $AK = a$, $BM = c$ и $CN = b$ (см. рисунок) и обозначим через S_1, S_2 и S_3 площади треугольников AKN, CMN и BKM, а через S — площадь треугольника ABC.



Тогда $S_1 = \frac{a(1-b)\sqrt{3}}{4}$, $S_2 = \frac{b(1-c)\sqrt{3}}{4}$, $S_3 = \frac{c(1-a)\sqrt{3}}{4}$, $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Учитывая, что $0 < S_1 + S_2 + S_3 < S$, получаем $0 < a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) < 1$.

12. Постройте треугольник ABC по двум его сторонам AC и AB, если известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$.

Введем для удобства последующих записей обозначения: $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, $\angle ABC = \alpha$, $\alpha\ \angle BAC = 2\alpha$. Заметим, что, если $b = c$, то искомый треугольник — равнобедренный с углами α, α и 2α, откуда $\alpha = 45°$. Таким образом, это равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом, равным b.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $c \neq b$.

Решение 1. Пусть ABC — данный треугольник. Отложим на луче BA отрезок AD, равный b, и проведем серединный перпендикуляр CH к отрезку BD (на рисунке 1 изображен случай $c > b$, на рисунке 2 — случай $c < b$). Тогда вершина C треугольника ABC — точка пересечения окружности с центром A и радиусом, равным b, и прямой CH, откуда и следует искомое построение.

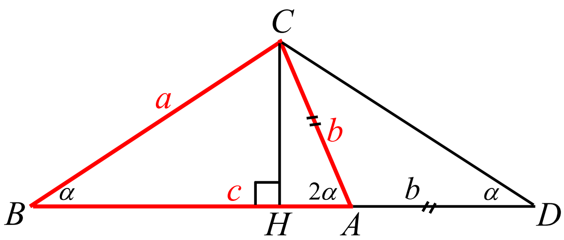


*Рис.*1

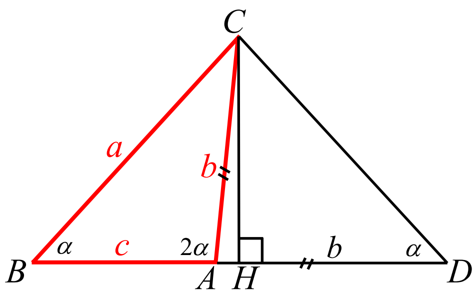


*Рис.*2

Задача имеет решение только тогда, когда $AH < AC$, т.е., тогда, когда $\left|c - \frac{b+c}{2}\right| < b$, откуда находим $\left|c - \frac{b+c}{2}\right| < b \Leftrightarrow \frac{|c-b|}{2} < b \Leftrightarrow -2b < c - b < 2b \underset{(c>0)}{\Leftrightarrow} c < 3b$.

Решение 2. Пусть ABC — данный треугольник. Достроим его до равнобедренной трапеции $ABDC$, в которой $AB = a$, $AC = CD = BD = b$, так, как это показано на рисунках 1, 2 (на рисунке 1 изображен случай $c > b$, на рисунке 2 — случай $c < b$).

Таким образом, построение искомого треугольника сводится к построению трапеции $ABDC$ по четырем ее сторонам.

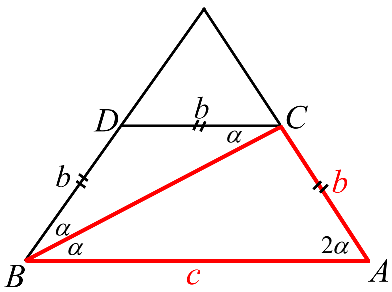


*Рис.*1

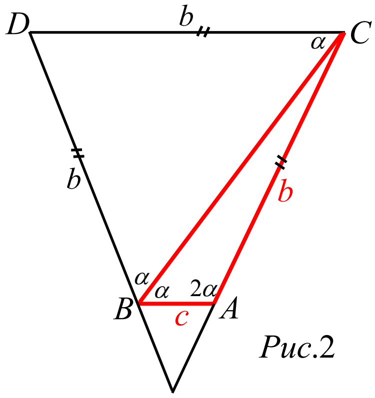
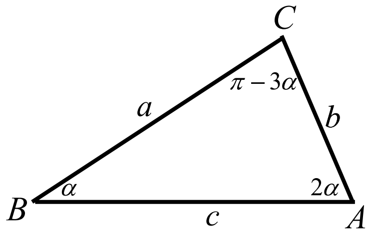


*Рис.*2

Ясно, что задача имеет решение только тогда, когда, $AB < AC + CD + DB$, т.е. тогда, когда $c < 3b$.

Решение 3. Согласно теореме синусов $\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin 3\alpha}$,

$b=\frac{c\sin\alpha}{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}=\frac{c}{3-4\sin^2\alpha}=\frac{c}{1+2\cos 2\alpha}$, $\cos 2\alpha=\frac{c-b}{2b}$. $(*)$



Подставляя выражение $(*)$ в формулу, выражающую теорему косинусов для данного треугольника, получаем:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 2\alpha=b^2+bc=b(b+c).$$

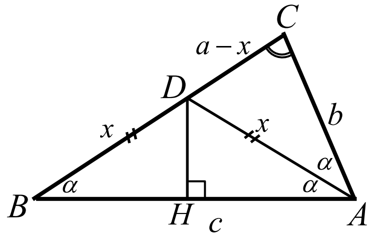
Таким образом, задача сводится к построению среднего геометрического отрезков длины b и b+c и последующего построения треугольника ABC по трем его сторонам: $BC=b(b+c)$, $AC=b$, $AB=c$.

Из равенства $(*)$ следует: $\left|\frac{c-b}{2b}\right|<1 \Leftrightarrow \frac{|c-b|}{2}<b \Leftrightarrow -2b<c-b<2b \underset{(c>0)}{\Leftrightarrow} c<3b$.

Значит, задача имеет решение только тогда, когда $c<3b$.

Решение 4. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC (см. рисунок). Тогда треугольник ABD — равнобедренный. Обозначим его боковые стороны BD и CD через x. Треугольники ACD и BCA имеют общий угол C и, равные углы DAC и ABC, значит, они подобны, откуда

$\frac{a-x}{b}=\frac{x}{c}=\frac{b}{a}$ или $a-x=\frac{b^2}{a}$ и $x=\frac{bc}{a}$.



Сложив почленно последние два равенства, получаем $a=\frac{b^2+bc}{a}$, откуда $a^2=b(b+c)$, т.е. третья сторона треугольника есть среднее геометрическое отрезков длины b и b+c.

Пусть отрезок DH — высота треугольника ABD, тогда $DA>AH$, т.е., $x>\frac{c}{2}$. Поскольку $\frac{x}{c}=\frac{b}{a}$, то $b>\frac{a}{2}$, откуда $4b^2>b(b+c) \underset{(b>0)}{\Leftrightarrow} c<3b$.

Значит, задача имеет решение только тогда, когда $c<3b$.