

# Седьмая олимпиада Эйлера для учителей математики

## Решения задач заочного тура

1. Докажите, для любых неотрицательных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  выполняется неравенство  $6a + 4b + 5c \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}$ .

**Решение.** Сложив почленно три известных неравенства:  $5a + 5b \geq 10\sqrt{ab}$ ,  $7a + 7c \geq 14\sqrt{ac}$  и  $3b + 3c \geq 6\sqrt{bc}$  и поделив затем обе части полученного неравенства на 2, получаем требуемое неравенство.

2. Существуют ли различные четные натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  такие, что  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{2013}$ ?

**Решение 1.**  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$ , следовательно  $\frac{1}{2 \cdot 2013} + \frac{1}{4 \cdot 2013} + \frac{1}{6 \cdot 2013} + \frac{1}{12 \cdot 2013} = \frac{1}{2013}$ .

**Решение 2.**  $\frac{1}{2013} = \frac{1}{3 \cdot 11 \cdot 61} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{11x} + \frac{1}{61x} = \frac{2900}{2013x}$ . Таким образом, при  $a = 2900$ ,  $b = 2900 \cdot 3$ ,  $c = 2900 \cdot 11$ ,  $d = 2900 \cdot 61$  получаем  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{2013}$ .

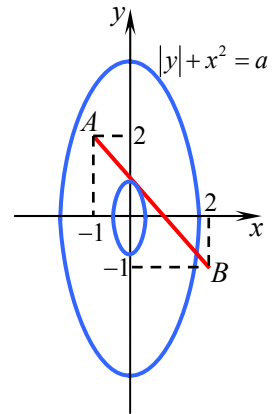
**Ответ:** да, существуют.

3. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 3\sqrt{2}, \\ |y| + x^2 = a. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**Решение.** График первого уравнения — отрезок с концами в точках  $A(-1; 2)$  и  $B(2; -1)$ . Множеством искомых значений параметра  $a$  являются либо промежуток  $(a_1; a_2]$ , где  $a_1$  и  $a_2$  — те значения  $a$ , при которых графики уравнений  $y + x^2 = a$  и  $-y + x^2 = a$  проходят соответственно через точки  $A(-1; 2)$  и  $B(2; -1)$ , либо значение  $a = a_3$ , где  $a_3$  — то значения  $a$ , при котором прямая  $AB$  ( $y = -x + 1$ ) касается графика уравнения  $y + x^2 = a$  (см. рисунок).



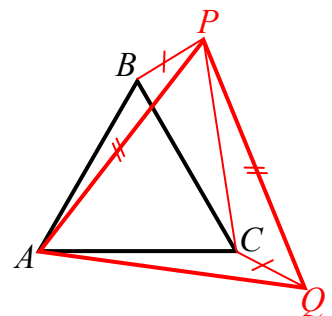
Таким образом:

- 1)  $a_1 = 2 + 1 = 3$ ;
- 2)  $a_2 = 1 + 4 = 5$ ;
- 3)  $-x + 1 = -x^2 + a_3 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - a_3 = 0$ ;  $D = 1 - 4(1 - a_3) = 4a_3 - 3 = 0$ ;  $a_3 = 0,75$ .

**Ответ:**  $3 < a \leq 5$ .  $a = 0,75$ .

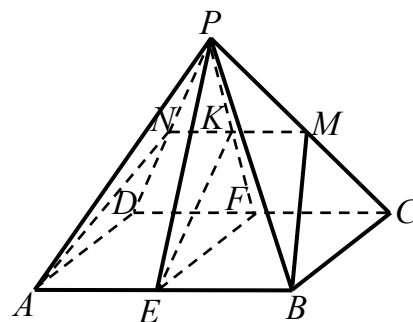
4. Пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  — вершины равностороннего треугольника,  $P$  — произвольная точка в плоскости этого треугольника. Докажите, что  $AP \leq BP + CP$ .

**Решение.** Рассмотрим поворот на  $60^\circ$  градусов вокруг точки  $A$ , переводящий точку  $B$  в точку  $C$ . Пусть при этом точка  $P$  переходит в точку  $Q$ . Так как треугольник  $APQ$  — равносторонний, то  $AP = PQ$ , а так как точка  $B$  перешла в точку  $C$ , а точка  $P$  перешла в точку  $Q$ , то  $BP = CQ$ . Осталось применить неравенство треугольника к треугольнику  $CPQ$ . Равенство выполняется в том случае, когда точка  $P$  лежит на дуге окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .



5. В правильной четырехугольной пирамиде косинус угла между противоположными боковыми гранями равен  $\frac{8}{9}$ . Найдите сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через ребро основания, площадь которого является наибольшей.

**Решение.** Пусть  $PABCD$  — данная пирамида, трапеция  $ABMN$  — сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через ребро  $AB$ ,  $\triangle PEF$  — ее сечение плоскостью, проходящей через апофемы  $PE$  и  $PF$ , точка  $K$  — точка пересечения прямых  $MN$  и  $PF$  (см. рисунок). Положим  $AB = 2$ ,  $MN = 2x$ ,  $PE = d$ ,  $EK = h$ . Тогда площадь сечения  $S$  равна  $S = (x+1)h$ .



Поскольку  $\cos \angle EPF = \frac{8}{9}$ , из треугольника  $EPF$  получаем  $d = 3\sqrt{2}$ . Далее имеем  $\frac{PK}{PF} = \frac{MN}{CD}$ , откуда  $PK = xd = 3\sqrt{2}x$ . Из треугольника  $PKE$  находим  $h = \sqrt{2(9x^2 - 16x + 9)}$ . Значит,  $S = (x+1)\sqrt{2(9x^2 - 16x + 9)}$ .

Исследуя функцию  $f(x) = (x+1)^2(9x^2 - 16x + 9)$  на отрезке  $[0; 1]$ , находим точки ее экстремумов:  $x = \frac{5-\sqrt{17}}{12}$  — точка максимума,  $x = \frac{5+\sqrt{17}}{12}$  — точка минимума.

Наибольшее значение этой функции достигается либо в точке  $x = \frac{5-\sqrt{17}}{12}$ , либо при  $x = 1$ .

Однако, поскольку  $f(0) > f(1)$ , наибольшим является значение  $f\left(\frac{5-\sqrt{17}}{12}\right)$ .

**Ответ:** Сечение, делящее боковые ребра в отношении  $\frac{x}{1-x} = \frac{5-\sqrt{17}}{7+\sqrt{17}} = \frac{13-3\sqrt{17}}{8}$ .

6. Числа  $a, b, c$  — целые, по модулю не превосходящие 10. Кубический многочлен  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  удовлетворяет условию  $|f(2 + \sqrt{3})| < 0,0001$ . Является ли число  $2 + \sqrt{3}$  корнем данного многочлена?

**Решение.** Значение  $f(2 + \sqrt{3})$  имеет вид  $A + B\sqrt{3}$ , где  $A$  и  $B$  — целые числа, и при этом  $|A + B\sqrt{3}| < 0,0001$ . По условию  $a, b, c$  — числа, по модулю не превосходящие 10, откуда следует, что  $|A - B\sqrt{3}| < 10000$ . Получаем,  $|A^2 - 3B^2| < 1$ , что возможно тогда и только тогда, когда  $A = B = 0$ . Таким образом,  $f(2 + \sqrt{3}) = 0$ .

**Ответ:** Да, является.

7. Докажите, что не существует функции  $f(x)$ , заданной и непрерывной на всей числовой прямой и не равной тождественно нулю, для которой при всех  $x, y \in \mathbb{R}$  справедливо тождество  $f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$ .

**Решение.** Предположим, что такая функция существует. Подставив  $x = y = 0$  в данное соотношение, получим  $f(0) = \frac{2f(0)}{1 - f^2(0)}$ , откуда  $f(0) = 0$ , поскольку  $\frac{2}{1 - f^2(0)} \neq 1$ . Ясно, что данная функция — нечетная. Значений, больших по модулю 1, она принимать не может, так как тогда в силу ее непрерывности в некоторой точке  $a$  она была бы по модулю равна 1, но тогда в точке  $2a$  эта функция бы не существовала, так как  $f(2a) = \frac{2f(a)}{1 - f^2(a)}$ .

Предположим, что значение функции  $f(x)$  в некоторой точке  $a$  лежит между 0 и 1. Тогда  $f(2a) = \frac{2f(a)}{1-f^2(a)} > 2f(a)$ . Применяв метод математической индукции, получаем  $f(2^k a) > 2^k f(a)$  для любого  $k \in \mathbb{N}$ , что невозможно, так как значений, больших 1, эта функция не принимает.

**8. Задача.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x^2 + xz + z^2 = 9, \\ y^2 + yz + z^2 = 36. \end{cases}$$

**Ответ:** Система решений не имеет.

**Решение.** Выберем точку  $O$  в некоторой плоскости и отложим в этой плоскости три отрезка:  $OA = x$ ,  $OB = y$  и  $OC = z$  так, что  $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 120^\circ$ . Из треугольника  $AOB$  по теореме косинусов находим:

$$AB^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ = x^2 + xy + y^2. \text{ По условию } x^2 + xy + y^2 = 4, \text{ значит } AB = 2.$$

Аналогично, из треугольников  $AOC$  и  $BOC$  получаем  $AC = 3$ ,  $BC = 6$ .

Таким образом, для треугольника  $ABC$  не выполняется неравенство треугольника.

**Комментарий.** Из условия не следует, что  $x, y, z$  — положительные числа.

**Верное решение.** Выберем точку  $O$  в некоторой плоскости и отложим в этой плоскости от точки  $O$  три единичных вектора  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$ , которые образуют друг с другом углы  $120^\circ$ . Пусть  $x, y, z$  — решения данной системы. Обозначим соответственно через  $A, B$  и  $C$  концы векторов  $x\vec{u}$ ,  $y\vec{v}$  и  $z\vec{w}$ . Далее имеем:

$$AB^2 = (\vec{OB} - \vec{OA})^2 = (y\vec{v} - x\vec{u})^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ = x^2 + xy + y^2 = 4, \text{ откуда } AB = 2.$$

Аналогично, получаем:  $AC = 3$ ,  $BC = 6$ .

Таким образом,  $AB + AC < BC$ , что противоречит неравенству треугольника.

**9. Задача.** Две окружности радиусов 4 и 8 касаются в точке  $A$ . Через точку  $A$  проведена прямая, пересекающая большую окружность в точке  $B$ , а меньшую — в точке  $C$ . Найдите  $AB$ , если известно, что  $BC = 6\sqrt{2}$ .

**Ответ:**  $4\sqrt{2}$ ,  $12\sqrt{2}$ .

**Решение.** Обозначим через  $O$  и  $Q$  центры меньшей и большей окружностей соответственно.

Случай 1. Внешнее касание (см. рисунок 1).

Треугольники  $AQB$  и  $AOC$  — равнобедренные и  $\angle BAQ = \angle CAO$ , следовательно, эти треугольники подобны, причем коэффициент подобия  $k$  равен отношению радиусов окружностей, описанных около треугольников, т.е.  $k = 2$ .

Таким образом,  $AB = 2AC = \frac{2}{3}BC = 4\sqrt{2}$ .

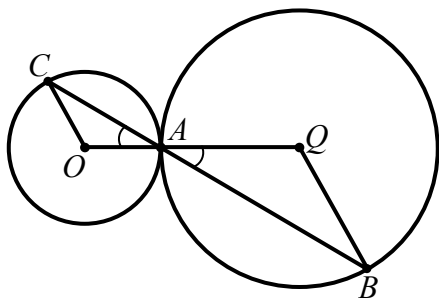


Рис.1

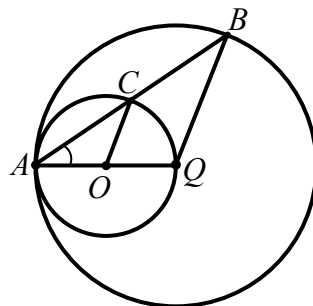


Рис.2

Случай 2. Внутреннее касание (см. рисунок 2).

Аналогично случаю 1, треугольники  $AQB$  и  $AOC$  подобны, и коэффициент подобия этих треугольников равен 2, откуда  $AB = 2AC = 2BC = 12\sqrt{2}$ .

**Комментарий.** Во втором случае хорда больше диаметра, т.е. внутреннее касание при заданных условиях невозможно.

**Верный ответ:**  $4\sqrt{2}$ .

**10. Задача.** Решите уравнение  $1 + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4})$ .

**Ответ:**  $-\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

**Решение.**  $1 + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

**Комментарий.** Неверно, что  $1 + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}}$ , т.к. левая и правая части формулы  $\operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}}$  имеют различные области определения.

При переходе от уравнения  $1 + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4})$  к уравнению  $1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}}$  возможна потеря решений  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Проверка показывает, что значения  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$  удовлетворяют исходному уравнению.

**Верный ответ:**  $\frac{\pi}{2} + \pi k, -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

**11.** Докажите, что если  $0 \leq a, b, c \leq 1$ , то  $0 \leq a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) \leq 1$ .

**Решение 1.** При условии  $0 \leq a, b, c \leq 1$  левая часть доказываемого двойного неравенства очевидна. Из этого же условия следует, что  $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 0$ , откуда получаем:  $1 - a - b - c + ab + bc + ac - abc \geq 0, a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) \leq 1 - abc \leq 1$ .

**Решение 2.** Заметим, что  $a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) = (1-b-c)a + (b+c-bc)$  и рассмотрим линейную функцию  $f(a) = (1-b-c)a + (b+c-bc)$  на отрезке  $[0; 1]$ :

а)  $f(0) = b+c-bc = 1 - (1-b+bc-c) = 1 - (1-b)(1-c)$ . Поскольку  $0 \leq 1-b \leq 1$  и  $0 \leq 1-c \leq 1$ , то  $0 \leq (1-b)(1-c) \leq 1$ , а, значит, и  $0 \leq 1 - (1-b)(1-c) \leq 1$ , т.е.,  $0 \leq f(0) \leq 1$ .

б)  $f(1) = 1 - b - c + b + c - bc = 1 - bc$ . Так как  $0 \leq bc \leq 1$ , то и  $0 \leq 1 - bc \leq 1$ , т.е.,  $0 \leq f(1) \leq 1$ .

Так как линейная функция монотонна, то  $0 \leq f(a) \leq 1$  для любого  $a \in [0; 1]$ .

**Решение 3.** Заметим, что, если хотя бы одно из чисел  $a, b$  и  $c$  равно нулю или единице, то неравенство выполняется.

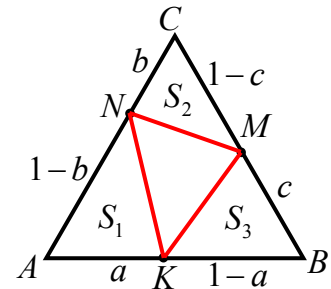
Действительно:

Если  $a=0$ , то  $a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) = b+c-bc = 1 - (1-b+bc-c) = 1 - (1-b)(1-c)$ . Так как  $0 \leq 1-b \leq 1$  и  $0 \leq 1-c \leq 1$ , то  $0 \leq (1-b)(1-c) \leq 1$ , а, следовательно, и  $0 \leq 1 - (1-b)(1-c) \leq 1$ .

Если  $a=1$ , то  $a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) = 1-b+b-bc = 1-bc$ . Так как  $0 \leq bc \leq 1$ , то и  $0 \leq 1-bc \leq 1$ .

Пусть теперь  $0 < a, b, c < 1$ .

Рассмотрим правильный треугольник  $ABC$  со стороной, равной 1. Отложим на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  этого треугольника соответственно отрезки  $AK = a$ ,  $BM = c$  и  $CN = b$  (см. рисунок) и обозначим через  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  площади треугольников  $AKN$ ,  $CMN$  и  $BKM$ , а через  $S$  — площадь треугольника  $ABC$ .



$$\text{Тогда } S_1 = \frac{a(1-b)\sqrt{3}}{4}, S_2 = \frac{b(1-c)\sqrt{3}}{4}, S_3 = \frac{c(1-a)\sqrt{3}}{4}, S = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Учитывая, что  $0 < S_1 + S_2 + S_3 < S$ , получаем  $0 < a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) < 1$ .

**12.** Постройте треугольник  $ABC$  по двум его сторонам  $AC$  и  $AB$ , если известно, что  $\angle BAC = 2\angle ABC$ .

Введем для удобства последующих записей обозначения:  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $\angle ABC = \alpha$ ,  $\angle BAC = 2\alpha$ . Заметим, что, если  $b = c$ , то искомым треугольником — равнобедренный с углами  $\alpha$ ,  $\alpha$  и  $2\alpha$ , откуда  $\alpha = 45^\circ$ . Таким образом, это равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом, равным  $b$ .

Рассмотрим теперь ситуацию, когда  $c \neq b$ .

**Решение 1.** Пусть  $ABC$  — данный треугольник. Отложим на луче  $BA$  отрезок  $AD$ , равный  $b$ , и проведем серединный перпендикуляр  $CH$  к отрезку  $BD$  (на рисунке 1 изображен случай  $c > b$ , на рисунке 2 — случай  $c < b$ ). Тогда вершина  $C$  треугольника  $ABC$  — точка пересечения окружности с центром  $A$  и радиусом, равным  $b$ , и прямой  $CH$ , откуда и следует искомое построение.

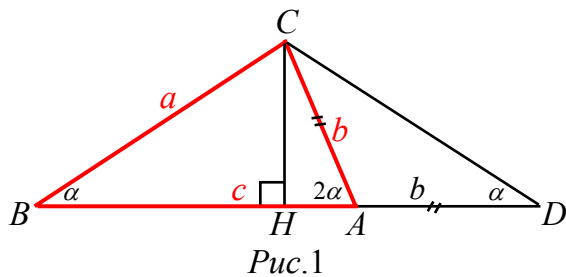


Рис.1

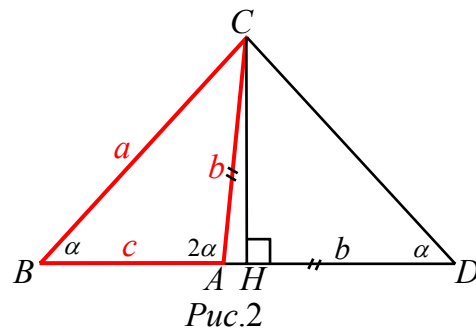


Рис.2

Задача имеет решение только тогда, когда  $AH < AC$ , т.е., тогда, когда  $\left|c - \frac{b+c}{2}\right| < b$ ,

$$\text{откуда находим } \left|c - \frac{b+c}{2}\right| < b \Leftrightarrow \frac{|c-b|}{2} < b \Leftrightarrow -2b < c-b < 2b \Leftrightarrow c < 3b. \quad (c > 0)$$

**Решение 2.** Пусть  $ABC$  — данный треугольник. Достроим его до равнобедренной трапеции  $ABDC$ , в которой  $AB = a$ ,  $AC = CD = BD = b$ , так, как это показано на рисунках 1, 2 (на рисунке 1 изображен случай  $c > b$ , на рисунке 2 — случай  $c < b$ ).

Таким образом, построение искомого треугольника сводится к построению трапеции  $ABDC$  по четырем ее сторонам.

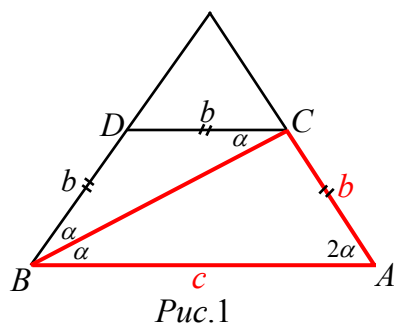


Рис.1

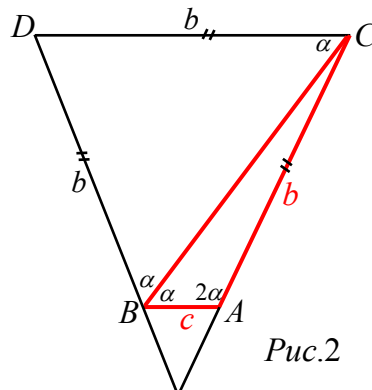


Рис.2

Ясно, что задача имеет решение только тогда, когда,  $AB < AC + CD + DB$ , т.е. тогда, когда  $c < 3b$ .

**Решение 3.** Согласно теореме синусов  $\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin 3\alpha}$ ,

$$b = \frac{c \sin \alpha}{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha} = \frac{c}{3 - 4 \sin^2 \alpha} = \frac{c}{1 + 2 \cos 2\alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{c-b}{2b}. \quad (*)$$

Подставляя выражение (\*) в формулу, выражающую теорему косинусов для данного треугольника, получаем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 2\alpha = b^2 + bc = b(b+c).$$

Таким образом, задача сводится к построению среднего геометрического отрезков длины  $b$  и  $b+c$  и последующего построения треугольника  $ABC$  по трем его сторонам:  $BC = b(b+c)$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ .

Из равенства (\*) следует:  $\left| \frac{c-b}{2b} \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|c-b|}{2} < b \Leftrightarrow -2b < c-b < 2b \Leftrightarrow c < 3b$ .  
( $c > 0$ )

Значит, задача имеет решение только тогда, когда  $c < 3b$ .

**Решение 4.** Пусть  $AD$  — биссектриса треугольника  $ABC$  (см. рисунок). Тогда треугольник  $ABD$  — равнобедренный. Обозначим его боковые стороны  $BD$  и  $CD$  через  $x$ . Треугольники  $ACD$  и  $BCA$  имеют общий угол  $C$  и, равные углы  $DAC$  и  $ABC$ , значит, они подобны, откуда

$$\frac{a-x}{b} = \frac{x}{c} = \frac{b}{a} \quad \text{или} \quad a-x = \frac{b^2}{a} \quad \text{и} \quad x = \frac{bc}{a}.$$

Сложив почленно последние два равенства, получаем  $a = \frac{b^2+bc}{a}$ , откуда  $a^2 = b(b+c)$ , т.е. третья сторона треугольника есть среднее геометрическое отрезков длины  $b$  и  $b+c$ .

Пусть отрезок  $DH$  — высота треугольника  $ABD$ , тогда  $DA > AH$ , т.е.,  $x > \frac{c}{2}$ . Поскольку  $\frac{x}{c} = \frac{b}{a}$ , то  $b > \frac{a}{2}$ , откуда  $4b^2 > b(b+c) \Leftrightarrow c < 3b$ .  
( $b > 0$ )

Значит, задача имеет решение только тогда, когда  $c < 3b$ .

