Седьмая олимпиада Эйлера для учителей математики

Уважаемые коллеги!

Вам предлагаются два блока заданий:
№1 – №7. «Математический» (задачи для решения).
№8 – №12. «Методический» (задания, моделирующие работу учителя).

Среди предложенных заданий есть и достаточно трудные; присылайте Ваши решения, даже если Вам не удалось выполнить некоторые из этих заданий. Единственное условие — в работе должны быть представлены задания из обоих блоков.

Желаем успеха! ***Жюри конкурса***

I. Математический блок

1. Докажите, для любых неотрицательных чисел a, b и c выполняется неравенство $6a+4b+5c \ge 5\sqrt{ab}+7\sqrt{ac}+3\sqrt{bc}$.

2. Существуют ли различные четные натуральные числа a, b, c и d такие, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2013}$?

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=3\sqrt{2},\\ |y|+x^2=a.\end{cases}$$

имеет единственное решение.

4. Пусть A, B и C — вершины равностороннего треугольника, P — произвольная точка в плоскости этого треугольника. Докажите, что $AP \le BP+CP$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде косинус угла между противоположными боковыми гранями равен $8/9$. Найдите сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через ребро основания, площадь которого является наибольшей.

6. Числа a, b, c — целые, по модулю не превосходящие 10. Кубический многочлен $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ удовлетворяет условию $\left|f(2+\sqrt{3})\right|<0{,}0001$. Является ли число $2+\sqrt{3}$ корнем данного многочлена?

7. Докажите, что не существует функции $f(x)$, заданной и непрерывной на всей числовой прямой и не равной тождественно нулю, для которой при всех $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо тождество $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$.

II. Методический блок

А. Ниже приводятся решения трех задач (№№ 8, 9, 10). Оцените каждое из решений и полученные ответы. Укажите все ошибки и недочеты и доведите предложенную идею до верного рассуждения.

8. **Задача.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=4,\\ x^2+xz+z^2=9,\\ y^2+yz+z^2=36.\end{cases}$$

Ответ: Система решений не имеет.

Решение. Выберем точку O в некоторой плоскости и отложим в этой плоскости три отрезка: $OA = x$, $OB = y$ и $OC = z$ так, что $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 120°$. Из треугольника AOB по теореме косинусов находим:

$AB^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120° = x^2 + xy + y^2$. По условию $x^2 + xy + y^2 = 4$, значит $AB = 2$.

Аналогично, из треугольников AOC и BOC получаем $AC = 3$, $BC = 6$.

Таким образом, для треугольника ABC не выполняется неравенство треугольника.

9. **Задача.** Две окружности радиусов 4 и 8 касаются в точке A. Через точку A проведена прямая, пересекающая большую окружность в точке B, а меньшую — в точке C. Найдите AB, если известно, что $BC = 6\sqrt{2}$.

Ответ: $4\sqrt{2}$, $12\sqrt{2}$.

Решение. Обозначим через O и Q центры меньшей и большей окружностей соответственно.

<u>Случай 1</u>. Вешнее касание (см. рисунок 1).

Треугольники AQB и AOC — равнобедренные и $\angle BAQ = \angle CAO$, следовательно, эти треугольники подобны, причем коэффициент подобия k равен отношению радиусов окружностей, описанных около треугольников, т.е. $k = 2$.

Таким образом, $AB = 2AC = \frac{2}{3}BC = 4\sqrt{2}$.

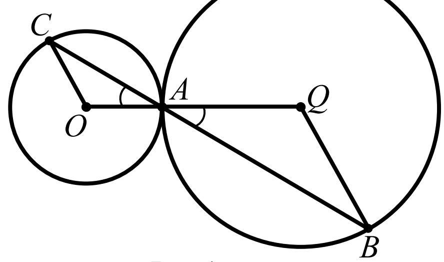

*Рис.*1

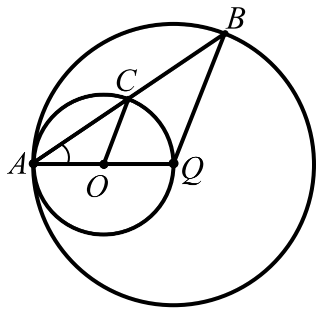

*Рис.*2

<u>Случай 2</u>. Внутреннее касание (см. рисунок 2).

Аналогично случаю 1, треугольники AQB и AOC подобны, и коэффициент подобия равен 2, откуда $AB = 2AC = 2BC = 12\sqrt{2}$.

10. **Задача.** Решите уравнение $1 + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4})$.

Ответ: $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Решение. $1 + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Б. Решите задачи №№ 11, 12 возможно большим числом способов (различными считаются способы, которые используют различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

11. Докажите, что если $0 \le a, b, c \le 1$, то $0 \le a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) \le 1$.

12. Постройте треугольник ABC по двум его сторонам AC и AB, если известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$.