Решение задач очного тура шестой олимпиады Эйлера

1. Решите уравнение $3^{x^2+x-2}-3^{x^2-4}=80$.

Ответ: $\{2\}$.

Решение. $3^{x^2+x-2}-3^{x^2-4}=80 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{x^2-4}(3^{x+2}-1)=80$.

Пусть $f(x)=3^{x^2-4}(3^{x+2}-1)$, тогда:

а) если $x<-2$, то $f(x)<0$, следовательно, на промежутке $(-\infty;-2)$ уравнение $f(x)=80$ решений не имеет;

б) если $-2\le x<0$, то $\begin{cases}\frac{1}{81}<3^{x^2-4}\le 1\\ 0\le 3^{x+2}-1<8\end{cases} \Leftrightarrow \; 0\le 2^{x^2-4}(2^{x+2}-1)<8$, $0\le f(x)<8$ и, значит, на промежутке $[-2;0)$ уравнение $f(x)=80$ также решений не имеет;

в) если $x\ge 0$, то функция $f(x)$ возрастает, следовательно, на промежутке $[0;+\infty)$ данное уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим $x=2$.

2. Пусть функция $f(x)$ задана на $\mathbb{R}$, причем для любого x выполняется условие $f(x+2)+f(x)=x$. Известно также, что $f(x)=x^3$ на промежутке $(-2;0]$. Найдите $f(2012)$.

Ответ: 1006.

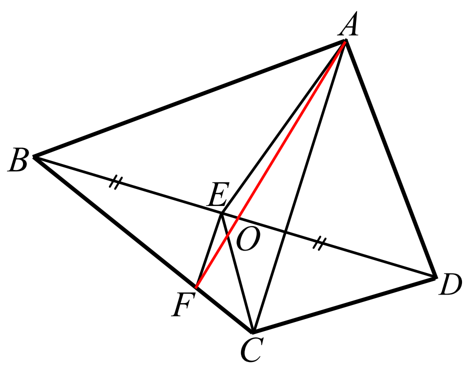
Решение. Подставив $x+2$ вместо x в равенство $f(x+2)+f(x)=x$, получаем $f(x+4)+f(x+2)=x+2$. Вычитая теперь почленно из полученного равенства исходное, находим $f(x+4)=f(x)+2$, откуда $f(2012)=f(0)+2\cdot 503=1006$.

3. Постройте прямую, проходящую через вершину выпуклого четырехугольника и делящую его на две равновеликие части.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник и точка E — середина его диагонали BD (см. рисунок). Тогда $S_{ABCE}=S_{ADCE}=0{,}5S_{ABCD}$, так как $S_{\Delta ABE}=S_{\Delta ADE}$ и $S_{\Delta BCE}=S_{DCE}$.

Если $E\in AC$, то AC — искомая прямая.

Пусть $E\notin AC$. Не теряя общности, положим, что точки B и E лежат по одну сторону от диагонали AC и построим прямую EF, параллельную AC ($F\in BC$) и прямую AF. Треугольники ACF и ACE равновелики, так как у них общее основание AC и равные высоты (расстояние между параллельными прямыми AC и EF). Следовательно,



$$S_{ADCF}=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta ACF}=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta ACE}=0{,}5S_{ABCD},$$

т.е. прямая AF делит данный четырехугольник на две равновеликие части.

4а. Докажите, что любое сечение правильного тетраэдра плоскостью, проходящей через середины двух его скрещивающихся ребер, делит тетраэдр на две равновеликие части.

Доказательство. Прямая, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, является серединным перпендикуляром к каждому из этих ребер, а, значит, при повороте на $180°$ вокруг этой прямой тетраэдр отображается на себя. Также на себя отображается и любая плоскость, содержащая эту прямую. Таким образом, части, на которые эта плоскость делит тетраэдр, отображаются друг на друга. Значит, они равны, а, следовательно, равновелики.

4б. Докажите, что сформулированное в пункте а) утверждение верно для любого (не обязательно правильного) тетраэдра.

Доказательство 1. Построим линейное отображение f пространства в себя, переводящее произвольный тетраэдр $OABC$ в правильный тетраэдр $OPQR$. Рассмотрим произвольную точку M и разложим вектор $\overrightarrow{OM}$ по базису $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ так, что $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$. Положим по определению, что $f(M) = K$, если точка K такова, что $\overrightarrow{OK} = x\overrightarrow{OP} + y\overrightarrow{OQ} + z\overrightarrow{OP}$. По построению f является линейным отображением, которое переводит $OABC$ в $OPQR$. Известно, что если V — объем некоторого тела, а V' — объем его образа при некотором линейном отображении, то $V' = cV$, где константа c зависит только от отображения и не зависит от выбора тела. Как следствие получаем, что отношение объемов тел не меняется при линейном отображении. Поэтому из доказанного в задаче **4а** следует, что плоскость, проходящая через середины противоположных ребер произвольного тетраэдра, делит его на две равновеликие части.

Доказательство 2. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, точки M и N — середины его ребер AB и CD соответственно. Обозначим через V объем этого тетраэдра.

1. Если плоскость, проходящая через прямую MN, параллельна ребру BD (ребру AC), то она делит данный тетраэдр на две части, каждая из которых состоит из треугольной призмы и треугольной пирамиды, площади оснований которых равны четверти площади основания S данного тетраэдра, а высоты — половине его высоты H (см. рисунок 1).

   Тогда объем каждой части равен
   $\frac{1}{4}S \cdot \frac{1}{2}H + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}S \cdot \frac{1}{2}H = \frac{1}{2}V$.

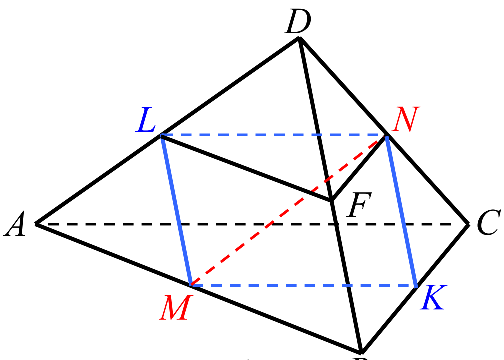


*Рис.*1

2. Если сечением является треугольник CDM, то оно делит данный тетраэдр на два равновеликих тетраэдра $DAMC$ и $DBMC$ с общей высотой, проведенной из вершины D, и равновеликими основаниями (см. рисунок 2).

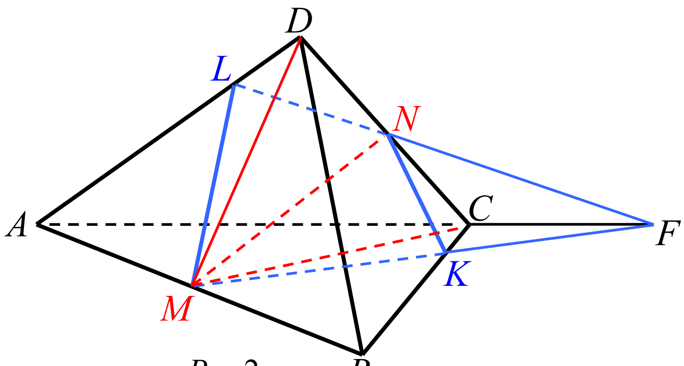


*Рис.*2

3. Рассмотрим теперь сечение $KMLN$ тетраэдра $ABCD$ плоскостью, которая не параллельна ни одному из ребер тетраэдра (см. рисунок 2).

Поскольку $V_{DAMC} = V_{DBMC} = \frac{1}{2}V$, достаточно доказать, что $V_{DLMN} = V_{CKMN}$.

а) Положим $AC = 2a$, $CF = b$ и проведем отрезок MQ — среднюю линию треугольника ABC (см. рисунок 3). Тогда $\Delta FKC \sim \Delta FMQ$, откуда $\frac{CK}{MQ} = \frac{b}{a+b}$, и, $\frac{CK}{CB} = \frac{b}{2(a+b)}$. *)

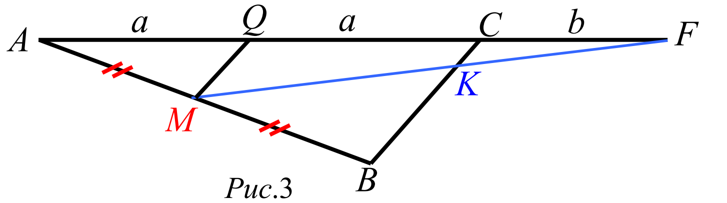


*Рис.*3

б) В плоскости грани ADC проведем $CE \parallel AD$, $E \in FN$ (см. рис. 4). Тогда $\Delta FEC \sim \Delta FLA$ и $\Delta ECN = \Delta LDN$, откуда $\frac{AL}{CE} = \frac{2a+b}{b}$, $\frac{AL}{DL} = \frac{2a+b}{b}$, $\frac{DL}{DA} = \frac{b}{2(a+b)}$. *)

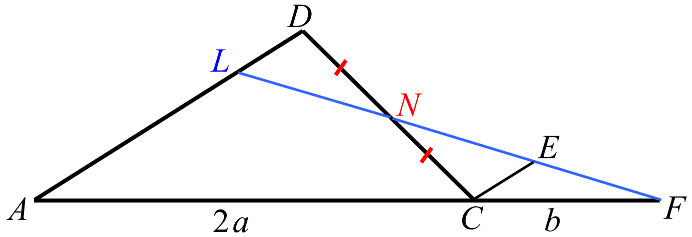


*Рис.*4

Далее имеем: $\frac{V_{DLMN}}{V_{DAMC}} = \frac{DL \cdot DM \cdot DN}{DA \cdot DM \cdot DC}$, $V_{DLMN} = \frac{b}{4(a+b)} \cdot V_{DAMC} = \frac{bV}{8(a+b)}$.

$\frac{V_{CKMN}}{V_{CBMD}} = \frac{CK \cdot CM \cdot CN}{CB \cdot CM \cdot CD}$, $V_{CKMN} = \frac{b}{4(a+b)} \cdot V_{CBDM} = \frac{bV}{8(a+b)}$.

Таким образом, $V_{DLMN} = V_{CKMN}$ и, значит, $V_{BMKLDN} = V_{BCDM} - V_{CKMN} + V_{DLMN} = \frac{1}{2}V$.

5. Найдите наименьшее простое число p такое, что n^2+n+11 делится на p при некотором целом n.

Ответ: 11.

Решение.

1. $n(n+1)$ — четно, следовательно, n^2+n+11 — нечетно, т.е. не делится на 2;
2. $n^2+n+11=(n-1)^2+1+3n+9$. Для того, чтобы это число делилось на 3, нужно, чтобы квадрат давал остаток 2 при делении на 3, чего не бывает (может быть только 0 или 1);
3. $n^2+n+11=(n-2)^2+2+5n+5$. Для того, чтобы это число делилось на 5, нужно, чтобы квадрат оканчивался на 3 или на 8 (давал остаток 3 при делении на 5), чего не бывает;
4. $n^2+n+11=(n-3)^2+2+7n$. Для того, чтобы это число делилось на 7, нужно, чтобы квадрат давал остаток 5 при делении на 7, чего не бывает (может быть только 0, 1, 2 или 4);
5. n^2+n+11 делится на 11 при $n=0$. Значит $p=11$ — искомое простое число.

6. Оцените три приведенные ниже решения одной задачи и полученный в каждом случае ответ, укажите все ошибки и недочеты, а также **верное решение** задачи.

Задача. *Из карточной колоды выбрали шесть карт — три черной масти и три красной масти. Выбранные карты перемешали и сложили стопкой. Какова вероятность того, что три нижние карты окажутся одной масти?*

Обозначим карты красной масти через **к**, *черной — через* **ч**.

Решение 1. *Перечислим все возможные случаи. Нижними могут оказаться: а)* **3 к**; *б)* **2 к** *и* **1 ч**; *в)* **1 к** *и* **2 ч**; *г)* **3 ч**. *Из этих 4 случаев условию удовлетворяют 2 случая — а) и г). Искомая вероятность равна* $\frac{1}{2}$. **Ответ:** $\frac{1}{2}$.

Решение 2. *Перечислим все возможные случаи. Среди верхних трех карт может оказаться: а) на* **1 к** *больше, чем среди нижних; б) на* **1 ч** *больше, чем среди нижних; в) все карты одной масти. Из этих 3 случаев условию удовлетворяют только один случай — в). Искомая вероятность равна* $\frac{1}{3}$ **Ответ:** $\frac{1}{3}$.

Решение 3. *Есть только 8 случаев возможного расположения 3-х нижних карт: а)* **ччч**; *б)* **ччк**; *в)* **чкч**; *г)* **кчч**; *д)* **чкк**; *е)* **кчк**; *ж)* **ккч**; *г)* **ккк**. *Из этих 8 случаев условию удовлетворяют 2 — а) и г). Искомая вероятность равна* $\frac{1}{4}$. **Ответ:** $\frac{1}{4}$.

Комментарий. Во всех приведенных выше решениях допущена принципиальная ошибка — рассматриваемые в них события не являются равновероятными.

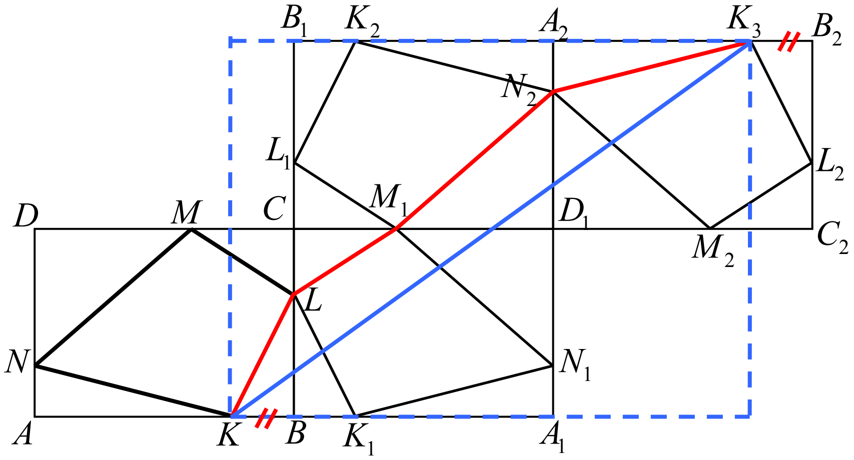
Пример верного решения: Количество возможных вариантов расположения 6 карт равно $6!=720$. При этом «красные снизу, черные сверху» — $3!\cdot 3!=36$ вариантов, «черные снизу, красные сверху» — также $3!\cdot 3!=36$ вариантов. Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{36+36}{720}=\frac{1}{10}$.

Правильный ответ: 0,1**.**

7. Решите следующую задачу возможно большим числом способов (различными считаются способы, использующие различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

Задача. В прямоугольник вписан четырехугольник так, что на каждой стороне прямоугольника лежит по одной вершине четырехугольника. Докажите, что периметр четырехугольника не меньше удвоенной диагонали прямоугольника.

Решение 1. Пусть четырехугольник *KLMN* вписан так, как указано в условии, в прямоугольник *ABCD* (см. рисунок).



Последовательно сделаем три осевые симметрии: относительно прямой BC, относительно прямой CD и относительно прямой A_1D_1 — образа прямой AD при первой симметрии (см.рисунок). При этом образы сторон четырехугольника $KLMN$ образуют ломаную $KLM_1N_2K_3$, концы которой соединяются отрезком KK_3, длина которого равна удвоенной диагонали прямоугольника $ABCD$.

Тема. «*Преобразования плоскости*».

Решение 2. Пусть четырехугольник $KLMN$ вписан так, как указано в условии, в прямоугольник $ABCD$, и точка K_1 симметрична точке K относительно прямой BC, а точка K_2 симметрична точке K относительно прямой AD (см. рисунок 1).

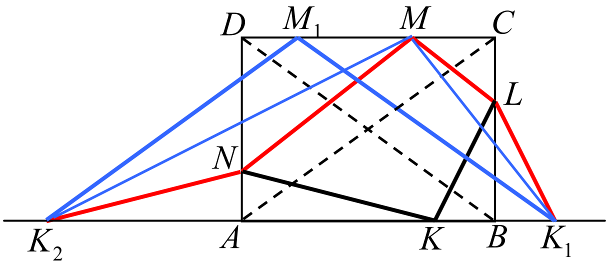


Рис.1

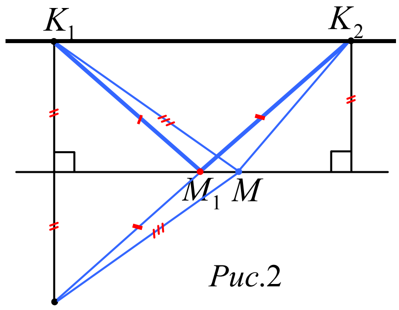
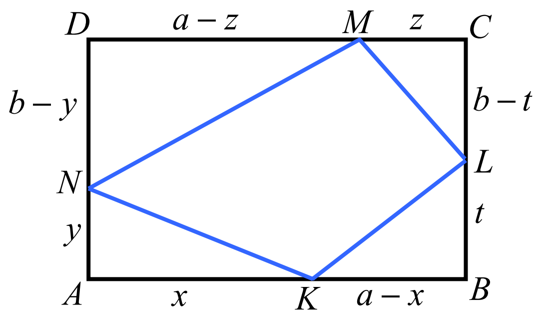


Рис.2

Тогда длина ломаной K_1LMNK_2, равная периметру четырехугольника $KLMN$, не меньше суммы длин боковых сторон K_1M и K_2M треугольника K_1K_2M. Эта сумма принимает наименьшее значение тогда, когда треугольник K_1K_2M' равнобедренный (см. рисунок 2). В этом случае $K_1M' = K_2M' = BD$, откуда и следует, что $P_{KLMN} \geq 2BD$.

Тема. «*Преобразования плоскости*».

Решение 3. Пусть четырехугольник $KLMN$ вписан так, как указано в условии, в прямоугольник $ABCD$ (см. рисунок).



Положим $AB = a,\ BC = b,\ AK = x,\ AN = y,\ BL = t,\ CM = z$. Тогда

$$KL + LM + MN + NK = \sqrt{(a-x)^2 + t^2} + \sqrt{(b-t)^2 + z^2} + \sqrt{(a-z)^2 + (b-y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Рассмотрим векторы $\vec{m}\{x; y\}$, $\vec{n}\{a-x; t\}$, $\vec{p}\{z; b-t\}$, $\vec{q}\{a-z; b-y\}$ и $\vec{u} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{p} + \vec{q}$.

Поскольку $\vec{u}\{2a; 2b\}$ и $|\vec{m}| + |\vec{n}| + |\vec{p}| + |\vec{q}| \geq |\vec{m} + \vec{n} + \vec{p} + \vec{q}|$, окончательно получаем

$$\sqrt{(a-x)^2 + t^2} + \sqrt{(b-t)^2 + z^2} + \sqrt{(a-z)^2 + (b-y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Тема. «*Векторы и координаты*».

---

*) Указанные соотношения легко получить, применив теорему Менелая к каждому из треугольников ABC и ACD.