

## Решение задач очного тура шестой олимпиады Эйлера

1. Решите уравнение  $3^{x^2+x-2} - 3^{x^2-4} = 80$ .

**Ответ:**  $\{2\}$ .

**Решение.**  $3^{x^2+x-2} - 3^{x^2-4} = 80 \Leftrightarrow 3^{x^2-4}(3^{x+2} - 1) = 80$ .

Пусть  $f(x) = 3^{x^2-4}(3^{x+2} - 1)$ , тогда:

а) если  $x < -2$ , то  $f(x) < 0$ , следовательно, на промежутке  $(-\infty; -2)$  уравнение  $f(x) = 80$  решений не имеет;

б) если  $-2 \leq x < 0$ , то  $\begin{cases} \frac{1}{81} < 3^{x^2-4} \leq 1 \\ 0 \leq 3^{x+2} - 1 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq 2^{x^2-4}(2^{x+2} - 1) < 8, 0 \leq f(x) < 8$  и,

значит, на промежутке  $[-2; 0)$  уравнение  $f(x) = 80$  также решений не имеет;

в) если  $x \geq 0$ , то функция  $f(x)$  возрастает, следовательно, на промежутке  $[0; +\infty)$  данное уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим  $x = 2$ .

2. Пусть функция  $f(x)$  задана на  $\mathbb{R}$ , причем для любого  $x$  выполняется условие  $f(x+2) + f(x) = x$ . Известно также, что  $f(x) = x^3$  на промежутке  $(-2; 0]$ . Найдите  $f(2012)$ .

**Ответ:** 1006.

**Решение.** Подставив  $x+2$  вместо  $x$  в равенство  $f(x+2) + f(x) = x$ , получаем  $f(x+4) + f(x+2) = x+2$ . Вычитая теперь почленно из полученного равенства исходное, находим  $f(x+4) = f(x) + 2$ , откуда  $f(2012) = f(0) + 2 \cdot 503 = 1006$ .

3. Постройте прямую, проходящую через вершину выпуклого четырехугольника и делящую его на две равновеликие части.

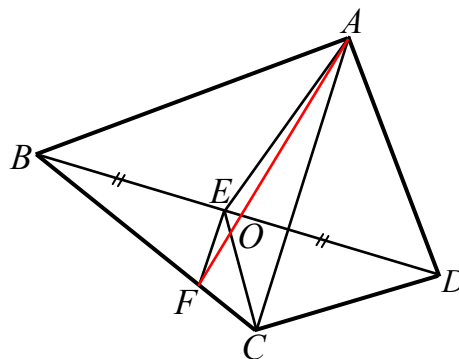
**Решение.** Пусть  $ABCD$  — данный четырехугольник и точка  $E$  — середина его диагонали  $BD$  (см. рисунок). Тогда  $S_{ABCE} = S_{ADCE} = 0,5S_{ABCD}$ , так как  $S_{ABE} = S_{ADE}$  и  $S_{BCE} = S_{DCE}$ .

Если  $E \in AC$ , то  $AC$  — искомая прямая.

Пусть  $E \notin AC$ . Не теряя общности, положим, что точки  $B$  и  $E$  лежат по одну сторону от диагонали  $AC$  и построим прямую  $EF$ , параллельную  $AC$  ( $F \in BC$ ) и прямую  $AF$ . Треугольники  $ACF$  и  $ACE$  равновелики, так как у них общее основание  $AC$  и равные высоты (расстояние между параллельными прямыми  $AC$  и  $EF$ ). Следовательно,

$$S_{ADCF} = S_{ACD} + S_{ACF} = S_{ACD} + S_{ACE} = 0,5S_{ABCD},$$

т.е. прямая  $AF$  делит данный четырехугольник на две равновеликие части.



4а. Докажите, что любое сечение правильного тетраэдра плоскостью, проходящей через середины двух его скрещивающихся ребер, делит тетраэдр на две равновеликие части.

**Доказательство.** Прямая, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, является серединным перпендикуляром к каждому из этих ребер, а, значит, при повороте на  $180^\circ$  вокруг этой прямой тетраэдр отображается на себя. Также на себя отображается и любая плоскость, содержащая эту прямую. Таким образом, части, на которые эта плоскость делит тетраэдр, отображаются друг на друга. Значит, они равны, а, следовательно, равновелики.

**46.** Докажите, что сформулированное в пункте а) утверждение верно для любого (не обязательно правильного) тетраэдра.

**Доказательство 1.** Построим линейное отображение  $f$  пространства в себя, переводящее произвольный тетраэдр  $OABC$  в правильный тетраэдр  $OPQR$ . Рассмотрим произвольную точку  $M$  и разложим вектор  $\overrightarrow{OM}$  по базису  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$  так, что  $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ . Положим по определению, что  $f(M) = K$ , если точка  $K$  такова, что  $\overrightarrow{OK} = x\overrightarrow{OP} + y\overrightarrow{OQ} + z\overrightarrow{OR}$ . По построению  $f$  является линейным отображением, которое переводит  $OABC$  в  $OPQR$ . Известно, что если  $V$  — объем некоторого тела, а  $V'$  — объем его образа при некотором линейном отображении, то  $V' = cV$ , где константа  $c$  зависит только от отображения и не зависит от выбора тела. Как следствие получаем, что отношение объемов тел не меняется при линейном отображении. Поэтому из доказанного в задаче **4а** следует, что плоскость, проходящая через середины противоположных ребер произвольного тетраэдра, делит его на две равновеликие части.

**Доказательство 2.** Пусть  $ABCD$  — данный тетраэдр, точки  $M$  и  $N$  — середины его ребер  $AB$  и  $CD$  соответственно. Обозначим через  $V$  объем этого тетраэдра.

1. Если плоскость, проходящая через прямую  $MN$ , параллельна ребру  $BD$  (ребру  $AC$ ), то она делит данный тетраэдр на две части, каждая из которых состоит из треугольной призмы и треугольной пирамиды, площади оснований которых равны четверти площади основания  $S$  данного тетраэдра, а высоты — половине его высоты  $H$  (см. рисунок 1).

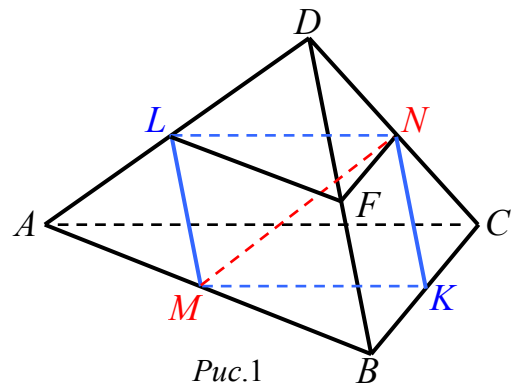


Рис.1

Тогда объем каждой части равен

$$\frac{1}{4}S \cdot \frac{1}{2}H + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}S \cdot \frac{1}{2}H = \frac{1}{2}V.$$

2. Если сечением является треугольник  $CDM$ , то оно делит данный тетраэдр на два равновеликих тетраэдра  $DAMC$  и  $DBMC$  с общей высотой, проведенной из вершины  $D$ , и равновеликими основаниями (см. рисунок 2).

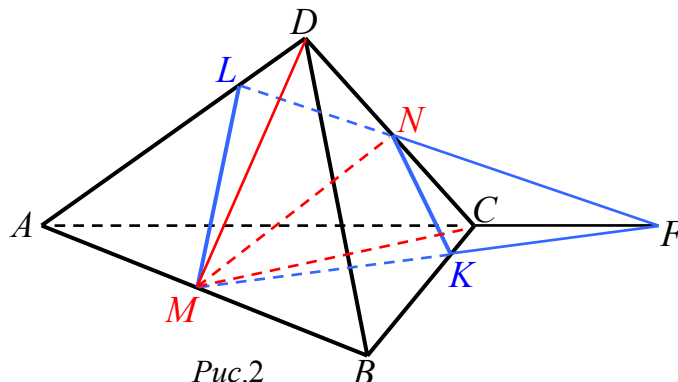


Рис.2

3. Рассмотрим теперь сечение  $KMLN$  тетраэдра  $ABCD$  плоскостью, которая не параллельна ни одному из ребер тетраэдра (см. рисунок 2).

Поскольку  $V_{DAMC} = V_{DBMC} = \frac{1}{2}V$ , достаточно доказать, что  $V_{DLMN} = V_{CKMN}$ .

а) Положим  $AC = 2a$ ,  $CF = b$  и проведем отрезок  $MQ$  — среднюю линию треугольника  $ABC$  (см. рисунок 3). Тогда  $\Delta FKC \sim \Delta FMQ$ , откуда  $\frac{CK}{MQ} = \frac{b}{a+b}$ , и,

$$\frac{CK}{CB} = \frac{b}{2(a+b)}. \quad *)$$

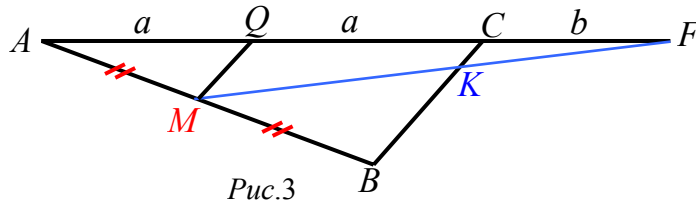


Рис.3

б) В плоскости грани  $ADC$  проведем  $CE \parallel AD$ ,  $E \in FN$  (см. рис. 4). Тогда

$\Delta FEC \sim \Delta FLA$  и  $\Delta ECN = \Delta LDN$ , откуда  $\frac{AL}{CE} = \frac{2a+b}{b}$ ,  $\frac{AL}{DL} = \frac{2a+b}{b}$ ,  $\frac{DL}{DA} = \frac{b}{2(a+b)}$ . \*)

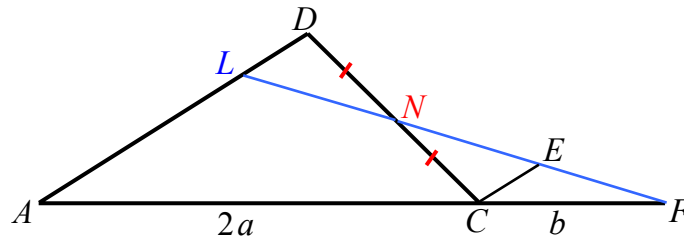


Рис.4

$$\text{Далее имеем: } \frac{V_{DLMN}}{V_{DAMC}} = \frac{DL \cdot DM \cdot DN}{DA \cdot DM \cdot DC}, \quad V_{DLMN} = \frac{b}{4(a+b)} \cdot V_{DAMC} = \frac{bV}{8(a+b)}.$$

$$\frac{V_{CKMN}}{V_{CBMD}} = \frac{CK \cdot CM \cdot CN}{CB \cdot CM \cdot CD}, \quad V_{CKMN} = \frac{b}{4(a+b)} \cdot V_{CBMD} = \frac{bV}{8(a+b)}.$$

Таким образом,  $V_{DLMN} = V_{CKMN}$  и, значит,  $V_{BMKLDN} = V_{BCDM} - V_{CKMN} + V_{DLMN} = \frac{1}{2}V$ .

5. Найдите наименьшее простое число  $p$  такое, что  $n^2 + n + 11$  делится на  $p$  при некотором целом  $n$ .

**Ответ:** 11.

**Решение.**

- $n(n+1)$  — четно, следовательно,  $n^2 + n + 11$  — нечетно, т.е. не делится на 2;
- $n^2 + n + 11 = (n-1)^2 + 1 + 3n + 9$ . Для того, чтобы это число делилось на 3, нужно, чтобы квадрат давал остаток 2 при делении на 3, чего не бывает (может быть только 0 или 1);
- $n^2 + n + 11 = (n-2)^2 + 2 + 5n + 5$ . Для того, чтобы это число делилось на 5, нужно, чтобы квадрат оканчивался на 3 или на 8 (давал остаток 3 при делении на 5), чего не бывает;
- $n^2 + n + 11 = (n-3)^2 + 2 + 7n$ . Для того, чтобы это число делилось на 7, нужно, чтобы квадрат давал остаток 5 при делении на 7, чего не бывает (может быть только 0, 1, 2 или 4);
- $n^2 + n + 11$  делится на 11 при  $n = 0$ . Значит  $p = 11$  — искомое простое число.

6. Оцените три приведенные ниже решения одной задачи и полученный в каждом случае ответ, укажите все ошибки и недочеты, а также **верное решение** задачи.

**Задача.** Из карточной колоды выбрали шесть карт — три черной масти и три красной масти. Выбранные карты перемешали и сложили стопкой. Какова вероятность того, что три нижние карты окажутся одной масти?

Обозначим карты красной масти через **к**, черной — через **ч**.

**Решение 1.** Перечислим все возможные случаи. Нижними могут оказаться: а) 3 к; б) 2 к и 1 ч; в) 1 к и 2 ч; г) 3 ч. Из этих 4 случаев условию удовлетворяют 2 случая — а) и г). Искомая вероятность равна  $\frac{1}{2}$ . **Ответ:**  $\frac{1}{2}$ .

**Решение 2.** Перечислим все возможные случаи. Среди верхних трех карт может оказаться: а) на 1 к больше, чем среди нижних; б) на 1 ч больше, чем среди нижних; в) все карты одной масти. Из этих 3 случаев условию удовлетворяют только один случай — в). Искомая вероятность равна  $\frac{1}{3}$ . **Ответ:**  $\frac{1}{3}$ .

**Решение 3.** Есть только 8 случаев возможного расположения 3-х нижних карт: а) ччч; б) ччк; в) чкч; г) кчч; д) чкк; е) кчк; ж) ккч; з) ккк. Из этих 8 случаев условию удовлетворяют 2 — а) и г). Искомая вероятность равна  $\frac{1}{4}$ . **Ответ:**  $\frac{1}{4}$ .

**Комментарий.** Во всех приведенных выше решениях допущена принципиальная ошибка — рассматриваемые в них события не являются равновероятными.

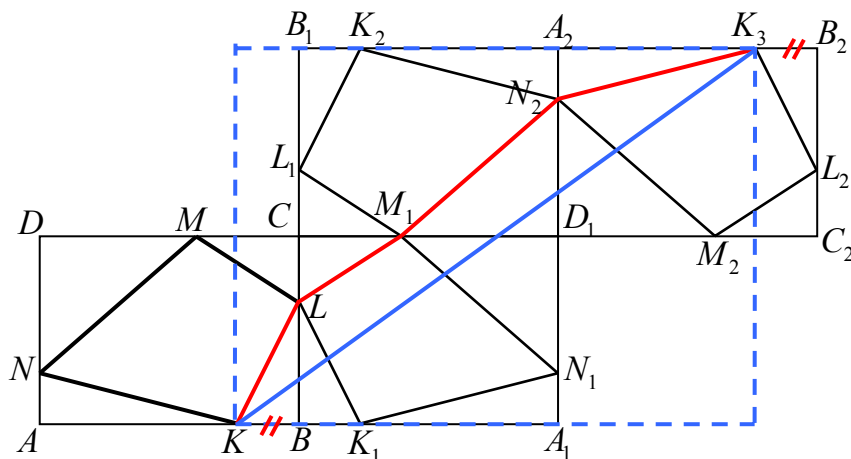
**Пример верного решения:** Количество возможных вариантов расположения 6 карт равно  $6! = 720$ . При этом «красные снизу, черные сверху» —  $3! \cdot 3! = 36$  вариантов, «черные снизу, красные сверху» — также  $3! \cdot 3! = 36$  вариантов. Таким образом, искомая вероятность равна  $\frac{36+36}{720} = \frac{1}{10}$ .

**Правильный ответ:** 0,1.

7. Решите следующую задачу возможно большим числом способов (различными считаются способы, использующие различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

**Задача.** В прямоугольник вписан четырехугольник так, что на каждой стороне прямоугольника лежит по одной вершине четырехугольника. Докажите, что периметр четырехугольника не меньше удвоенной диагонали прямоугольника.

**Решение 1.** Пусть четырехугольник  $KLMN$  вписан так, как указано в условии, в прямоугольник  $ABCD$  (см. рисунок).



Последовательно сделаем три осевые симметрии: относительно прямой  $BC$ , относительно прямой  $CD$  и относительно прямой  $A_1D_1$  — образа прямой  $AD$  при первой симметрии (см.рисунок). При этом образы сторон четырехугольника  $KLMN$  образуют ломаную  $KLM_1N_2K_3$ , концы которой соединяются отрезком  $KK_3$ , длина которого равна удвоенной диагонали прямоугольника  $ABCD$ .

**Тема.** «Преобразования плоскости».

**Решение 2.** Пусть четырехугольник  $KLMN$  вписан так, как указано в условии, в прямоугольник  $ABCD$ , и точка  $K_1$  симметрична точке  $K$  относительно прямой  $BC$ , а точка  $K_2$  симметрична точке  $K$  относительно прямой  $AD$  (см. рисунок 1).

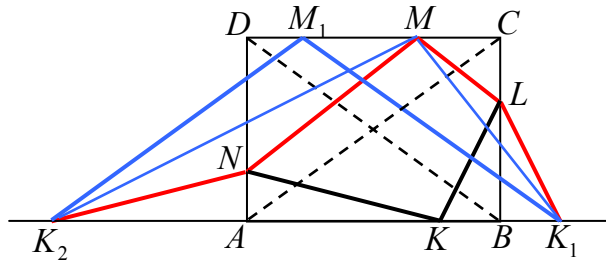


Рис.1

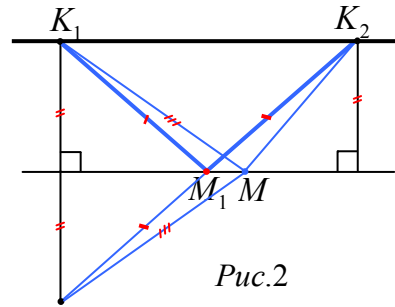
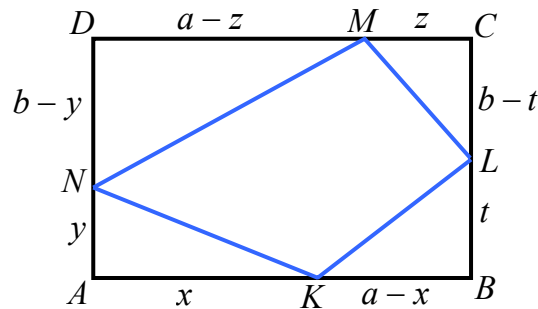


Рис.2

Тогда длина ломаной  $K_1LMNK_2$ , равная периметру четырехугольника  $KLMN$ , не меньше суммы длин боковых сторон  $K_1M$  и  $K_2M$  треугольника  $K_1K_2M$ . Эта сумма принимает наименьшее значение тогда, когда треугольник  $K_1K_2M'$  равнобедренный (см. рисунок 2). В этом случае  $K_1M' = K_2M' = BD$ , откуда и следует, что  $P_{KLMN} \geq 2BD$ .

**Тема.** «Преобразования плоскости».

**Решение 3.** Пусть четырехугольник  $KLMN$  вписан так, как указано в условии, в прямоугольник  $ABCD$  (см. рисунок).



Положим  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $AK = x$ ,  $AN = y$ ,  $BL = t$ ,  $CM = z$ . Тогда

$$KL + LM + MN + NK = \sqrt{(a-x)^2 + t^2} + \sqrt{(b-t)^2 + z^2} + \sqrt{(a-z)^2 + (b-y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Рассмотрим векторы  $\vec{m}\{x; y\}$ ,  $\vec{n}\{a-x; t\}$ ,  $\vec{p}\{z; b-t\}$ ,  $\vec{q}\{a-z; b-y\}$  и  $\vec{u} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{p} + \vec{q}$ .

Поскольку  $\vec{u}\{2a; 2b\}$  и  $|\vec{m}| + |\vec{n}| + |\vec{p}| + |\vec{q}| \geq |\vec{m} + \vec{n} + \vec{p} + \vec{q}|$ , окончательно получаем

$$\sqrt{(a-x)^2 + t^2} + \sqrt{(b-t)^2 + z^2} + \sqrt{(a-z)^2 + (b-y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}.$$

**Тема.** «Векторы и координаты».

\*) Указанные соотношения легко получить, применив теорему Менелая к каждому из треугольников  $ABC$  и  $ACD$ .