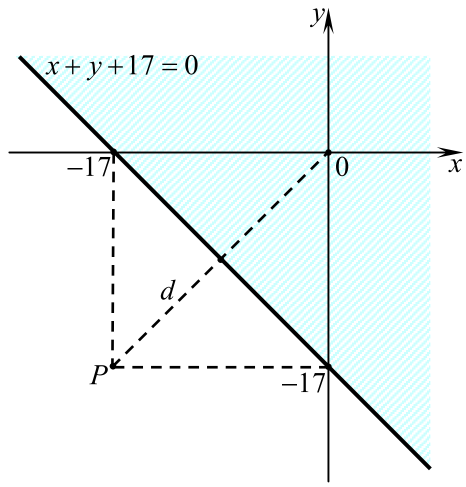
Решения задач заочного тура 6-й олимпиады Эйлера

I. Математический блок

1. Выясните, при каких значениях параметра a найдутся вещественные числа x и y, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{2xy+a} = x+y+17$.

Ответ: $a \ge -\frac{289}{2}$.

Решение. Имеем, $\sqrt{2xy+a} = x+y+17 \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy+a=(x+y+17)^2, & (1) \\ x+y+17 \ge 0. & (2) \end{cases}$



Преобразуя первое уравнение системы, получаем уравнение $(x+17)^2+(y+17)^2 = a+17^2$, которое при $a>-289$ задает на координатной плоскости окружность с центром в точке $P(-17;-17)$ и радиусом $r=\sqrt{a+17^2}$. Решениями системы являются координаты точек этой окружности, лежащие в полуплоскости, задаваемом неравенством $x+y+17 \ge 0$. Таким образом, система имеет решение тогда и только тогда, когда радиус окружности не меньше расстояния d от точки P до прямой $x+y+17=0$. Так как это расстояние есть половина диагонали квадрата со стороной 17 (см. рисунок), то $d=\frac{17}{\sqrt{2}}$. Поэтому $\sqrt{a+17^2} \ge \frac{17}{\sqrt{2}}$, откуда $a \ge -\frac{289}{2}$.

2. Решите уравнение $10x^3+12x^2+6x+1=0$.

Ответ: $x=-\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}}$.

Решение 1. Данное уравнение можно переписать в виде $2x^3+(2x+1)^3=0$, поэтому $x\sqrt[3]{2}=-2x-1$, откуда $x=-\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}}$.

Решение 2. Сделав замену переменной $x=\frac{1}{y}$, получаем $y^3+6y^2+12y+10=0$. Еще одна замена $y=z-2$ приводит к уравнению $z^3+2=0$, откуда $z=-\sqrt[3]{2}$, $y=-2-\sqrt[3]{2}$, $x=-\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}}$.

3. В ряд выписаны все натуральные числа, меньшие миллиарда, имеющие ровно 13 натуральных делителей (включая единицу и само число). Сколько среди них чисел с четной суммой цифр?

Ответ: два числа.

Решение. Если $n=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\ldots p_k^{s_k}$ (здесь p_1, p_2,…, p_k — различные простые числа), то число делителей числа n равно $(s_1+1)(s_2+1)\ldots(s_k+1)$, поэтому число делителей является простым, если само число n есть степень простого числа. В данном случае $n=p^{12}$. Из приведенной ниже таблицы видно, что искомые числа — 3^{12} и 5^{12}.

p	2	3	5	7
p^{12}	4096	531441	244140625	13841287201

4. Докажите, что при любых $a \ge 2$, $b \ge 2$, $c \ge 2$ справедливо неравенство
$\log_{b+c} a^2 + \log_{a+c} b^2 + \log_{a+b} c^2 \ge 3$.

Решение. Заметим, что, если $x \ge y \ge 2$, то $xy \ge 2x \ge x + y$. Таким образом, в нашем случае справедливы следующие неравенства $ab \ge a+b$, $bc \ge b+c$ и $ca \ge c+a$. Поэтому $\log_{b+c} a^2 = \frac{\lg a^2}{\lg(b+c)} \ge \frac{2\lg a}{\lg bc} = \frac{2\lg a}{\lg b + \lg c}$ и, аналогично, $\log_{a+c} b^2 \ge \frac{2\lg b}{\lg a + \lg c}$, $\log_{a+b} c^2 \ge \frac{2\lg c}{\lg a + \lg b}$. Положив $u = \lg a$, $v = \lg b$ и $w = \lg c$, получаем:

$$\log_{b+c} a^2 + \log_{a+c} b^2 + \log_{a+b} c^2 \ge 2\left(\frac{u}{v+w} + \frac{v}{u+w} + \frac{w}{u+v}\right) = 2\left(\frac{u}{v+w} + 1 + \frac{v}{u+w} + 1 + \frac{w}{u+v} + 1\right) - 6 =$$

$$= \big(2(u+v+w)\big)\left(\frac{1}{v+w} + \frac{1}{u+w} + \frac{1}{u+v}\right) - 6 = (m+n+p)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) - 6, \text{ где } m = u+v,\ n = u+w,$$

$p = v + w$. Согласно теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем:
$\frac{m+n+p}{3} \ge \sqrt[3]{mnp}$, $\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}{3} \ge \frac{1}{\sqrt[3]{mnp}}$, откуда $(m+n+p)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right) \ge 9$ и, следовательно,

$$(m+n+p)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right) - 6 \ge 3.$$

5. Найдите условия на коэффициенты многочлена $x^3 + ax^2 + bx + c$, при выполнении которых этот многочлен имеет три различных действительных корня, являющихся последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

Ответ: $a^3 c = b^3$, притом, что $-a^2 < b < a^2/3$.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3 — последовательные члены геометрической прогрессии, являющиеся корнями данного многочлена. Так как $x_2^3 = x_1 x_2 x_3 = -c$, то $x_2 = -\sqrt[3]{c}$. Подставив найденное значение в данный многочлен, получим, что $-c + a\sqrt[3]{c^2} - b\sqrt[3]{c} + c = 0$, откуда $a\sqrt[3]{c^2} = b\sqrt[3]{c}$. Так как $x_2 \ne 0$, то отсюда следует, что $a^3 c = b^3$. Теперь предположим, что $a^3 c = b^3$ и найдем дополнительное условие, при котором многочлен будет иметь три различных корня, образующих геометрическую прогрессию. Заметим, что числа a и b обращаются в нуль одновременно, а уравнение $x^3 + c = 0$ имеет только один действительный корень. Поэтому $a, b \ne 0$. Имеем,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + \frac{b^3}{a^3} + ax\left(x + \frac{b}{a}\right) = \left(x + \frac{b}{a}\right)\left(x^2 + \left(a - \frac{b}{a}\right)x + \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Положим $x_2 = -\frac{b}{a}$. Найдем условия, при которых стоящий в скобках квадратный трехчлен имеет два корня, для чего вычислим его дискриминант. Имеем,

$$D = \left(a - \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4b^2}{a^2} = a^2 - 2b = -3\frac{b^2}{a^2} = \frac{a^4 - 2a^2 b - 3b^2}{a^2} = -\frac{(3b - a^2)(b + a^2)}{a^2},$$

откуда и следует, что этот трехчлен имеет два различных корня x_1 и x_3 тогда и только тогда, когда $-a^2 < b < \frac{a^2}{3}$. Осталось заметить, что, так как $x_1 x_3 = \frac{b^2}{a^2} = x_2^2$, то числа x_1, x_2, x_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии.

6. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного семиугольника до произвольной прямой, проходящей через его центр, не зависит от положения этой прямой.

Решение. Выберем систему координат, началом которой является центр семиугольника, а ось абсцисс совпадает с рассматриваемой прямой. Будем для удобства считать, что радиус окружности, описанной около этого семиугольника, равен 1. Координатами вершин A_k этого многоугольника являются пары $\left(\cos\left(\alpha+\frac{2\pi k}{7}\right);\ \sin\left(\alpha+\frac{2\pi k}{7}\right)\right)$, где $k=0,1,\ldots,6$. Сумма квадратов расстояний от вершин семиугольника до рассматриваемой прямой равна

$$\sum_{k=0}^{6}\sin^2\left(\alpha+\frac{2\pi k}{7}\right)=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{6}\cos\left(2\alpha+\frac{4\pi k}{7}\right).$$

Докажем, что сумма косинусов равна нулю, откуда и будет следовать, что сумма квадратов расстояний не зависит от выбора прямой.

Доказательство 1. Домножив сумму косинусов на $2\sin\frac{2\pi}{7}$, получаем:

$$\sum_{k=0}^{6}2\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\left(2\alpha+\frac{4\pi k}{7}\right)=\sum_{k=0}^{6}\left(\sin\left(2\alpha+\frac{2\pi(2k+1)}{7}\right)-\sin\left(2\alpha+\frac{2\pi(2k-1)}{7}\right)\right)=$$
$$=\sin\left(2\alpha+\frac{26\pi}{7}\right)-\sin\left(2\alpha-\frac{2\pi}{7}\right)=0.$$

Доказательство 2. Введем комплексные числа $u=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$ и $v=\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}$. Так как $v^7=1$, то $u+uv+\ldots+uv^6=u\frac{v^7-1}{v-1}=0$. Осталось заметить, что действительная часть найденной суммы и равна сумме $\sum_{k=0}^{6}\cos\left(2\alpha+\frac{4\pi k}{7}\right)$.

Доказательство 3. Воспользуемся тем, что сумма векторов, идущих из центра правильного семиугольника в его вершины, равна нулю. Поэтому равна нулю и сумма их проекций на ось абсцисс. Следовательно,

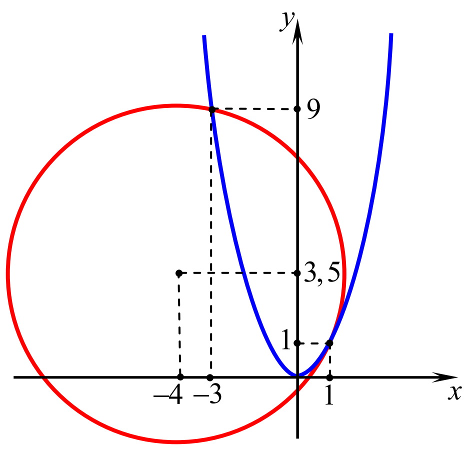
$$\sum_{k=0}^{6}\cos\left(2\alpha+\frac{4\pi k}{7}\right)=\sum_{k=0}^{6}\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi k}{7}\right)=0.$$

7. Окружность и парабола имеют ровно две общие точки, одна из которых является точкой касания данной параболы и данной окружности. Верно ли, что и вторая общая точка окружности и параболы также является их точкой касания?

Ответ: Нет, не верно.

Решение. Сначала мы приведем пример, а затем опишем его построение.

Рассмотрим окружность $(x+4)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$ и параболу $y=x^2$ (см. рисунок). Абсциссы их точек пересечения являются решения уравнения $(x+4)^2+\left(x^2-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$, которое легко сводится к уравнению $x^4-6x^2+8x-3=(x-1)^3(x+3)=0.$



Таким образом, данная окружность и парабола касаются друг друга в точке $A(1;1)$ и имеют еще одну общую точку — точку их **пересечения** $B(-3;9)$.

Опишем теперь способ построения окружности. Касательная к параболе $y = x^2$ в точке $A(1;1)$ имеет уравнение $y = 2x - 1$, поэтому центр окружности, касающейся параболы в этой точке, лежит на прямой $x + 2y - 3 = 0$. Нам будет удобно положить $x = 1 - 2t$ и $y = 1 + t$. Если $P(1-2t;1+t)$ — это центр окружности, проходящей через точку A, то ее радиус равен $|PA| = \sqrt{4t^2 + t^2} = |t|\sqrt{5}$. Координатами точек пересечения параболы и окружности являются решения системы

$$\begin{cases}(x-1+2t)^2 + (y-1-t)^2 = 5t^2,\\ y = x^2,\end{cases}$$

а их абсциссами — решения уравнения $(x-1+2t)^2 + \left(x^2-1-t\right)^2 = 5t^2$, преобразуя которое, получаем

$$(x-1)^2 + 4t(x-1) + \left(x^2-1\right)^2 - 2t\left(x^2-1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

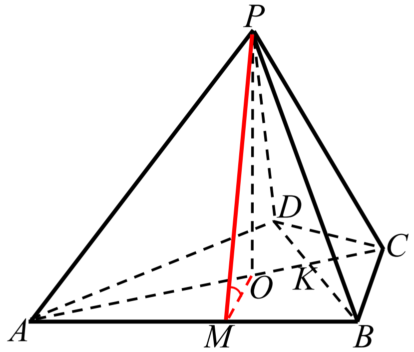
$$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2 + (x-1)^2 - 2t(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left((x+1)^2 + 1 - 2t\right) = 0.$$

Подберем значение t так, чтобы $x = 1$ было бы корнем кратности 3 полученного уравнения. Ясно, что это будет иметь место при $2t = 5$, т.е. $t = \frac{5}{2}$.

8. Задача. Найдите объем пирамиды *PABCD*, в основании которой лежит четырехугольник *ABCD* со сторонами 5, 5, 10 и 10, меньшая диагональ которого равна $4\sqrt{5}$, если известно, что все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°.

Ответ: $\frac{500}{9}$.

Решение. Пусть O — проекция вершины пирамиды на плоскость основания, а K — точка пересечения диагоналей основания (см. рисунок).



Тогда точка O — центр окружности, вписанной в четырехугольник *ABCD*, т.е. суммы противоположных сторон четырехугольника *ABCD* равны. Примем для определенности $AB = AD = 10$, $BC = CD = 5$. Треугольники *ABC* и *ADC* равны и, следовательно, отрезок *CK* является биссектрисой, медианой и высотой равнобедренного треугольника *BCD*. Таким образом, диагонали четырехугольника *ABCD* взаимно перпендикулярны и равны $4\sqrt{5}$ и $5\sqrt{5}$, а его площадь S равна $S = \frac{4\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{5}}{2} = 50$. Радиус r вписанной в основание пирамиды окружности равен $r = \frac{S}{p} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$. Поскольку все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°, то и $PO = \frac{10}{3}$, а, значит, объем V пирамиды *PABCD* равен $V = \frac{1}{3}\cdot 50\cdot\frac{10}{3} = \frac{500}{9}$.

Комментарий. Ошибка приведенного решения состоит в том, что не рассмотрены еще два возможных случая — случаи, когда высота пирамиды лежит вне пирамиды. В каждом из этих случаев основанием высоты пирамиды является центр окружности, касающейся всех четырех прямых AB, BC, CD и DA, содержащих стороны основания данной пирамиды (см.рисунки 1.1, 1.2)

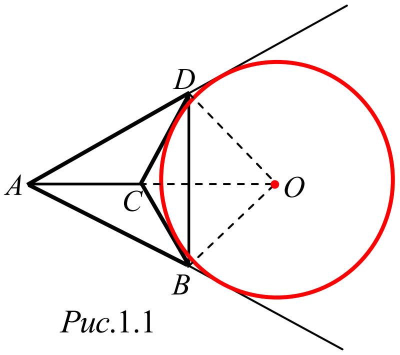


*Рис.*1.1

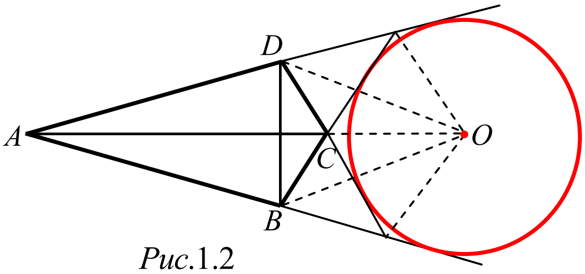


*Рис.*1.2

9. Задача. Докажите, что при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, выполняется неравенство

$$\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) + \sin x > \sin(\sin x) + \operatorname{tg} x$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg} x + \sin x - \sin(\sin x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{tg} x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x - \cos(\sin x) \cdot \cos x =$$

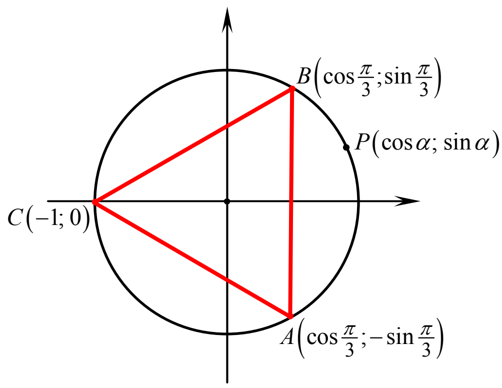
$$= \frac{1 - \cos^2(\operatorname{tg} x)}{\cos^2(\operatorname{tg} x) \cdot \cos^2 x} + \cos x\left(1 - \cos(\sin x)\right) > 0 \text{ при } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, функция $f(x)$ возрастает на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Кроме того, эта функция непрерывна в точке $x = 0$ и $f(0) = 0$. Значит, $f(x) > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Комментарий. Ошибка приведенного решения состоит в том, что функция $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg} x + \sin x - \sin(\sin x)$ определена не во всех точках промежутка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Так $\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а выражение $\operatorname{tg}\left(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2})\right)$ не имеет смысла.

Таким образом, решение в принципе неверно, как, впрочем, и само утверждение, которое требуется доказать. Так, например, при $x = \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{3}$ левая часть исходного неравенства отрицательна, а правая положительна.

10. Точка P лежит на дуге AB окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника ABC. Докажите, что $PC = PA + PB$.



Решение 1. Не теряя общности можно положить радиус описанной около треугольника окружности равным 1. Расположим треугольник ABC так, чтобы его вершинами были точки $A\left(\cos\frac{\pi}{3}; -\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\cos\frac{\pi}{3}; \sin\frac{\pi}{3}\right)$ и $C(-1; 0)$. Тогда $P(\cos\alpha; \sin\alpha)$, где $|\alpha| \le \frac{\pi}{3}$ (см. рисунок).

Далее имеем:

$$PC = \sqrt{(\cos\alpha + 1)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{2 + 2\cos\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2},\ PA = \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)} = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right),$$

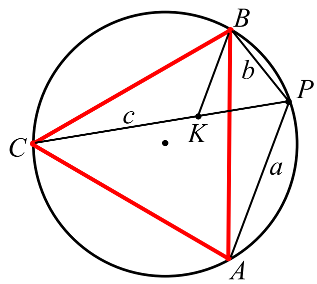
$$PB=\sqrt{\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\right)^2}=\sqrt{2-2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Осталось заметить, что $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}$.

Тема: «Метод координат».

Решение 2. Положим $a=PA$, $b=PB$ и $c=PC$. Так как $\angle APC=\angle BPC=60^\circ$, то, согласно теореме косинусов, получаем $c^2+a^2-ac=AC^2=BC^2=c^2+b^2-bc$, откуда $c^2+a^2-ac=c^2+b^2-bc \Leftrightarrow (a-b)(a+b)-c(a-b)=0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-c)=0$. Если $a\neq b$, то $a+b=c$. Если $a=b$, то PC — диаметр $2R$ данной окружности, а $PA=PB=R$, т.е. и в этом случае $a+b=c$.

Тема: «Вписанный угол; теорема косинусов».



Решение 3. Рассмотрим точку K отрезка PC, такую, что $PK=PB$ (см. рисунок). Так как $\angle BPK=60^\circ$, то треугольник BPK — равносторонний, в частности, $BK=BP$ и $\angle PBK=60^\circ$. Следовательно, при повороте на угол 60° вокруг точки B точка P перейдет в точку K. Поскольку при этом повороте точка A переходит в точку C, то отрезок PA перейдет в отрезок KC, откуда $PA=KC$. Поэтому $CP=CK+KP=PA+PB$.

Тема: «Геометрические преобразования».

Решение 4. Установим связь с другой известной задачей. Найдем множество точек, суммы квадратов расстояний от которых до трех данных точек $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $(x_3;\ y_3)$ постоянна. Это множество задается уравнением

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2=q.$$

Преобразуя его, получаем уравнение

$$3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y=q_1,$$

или уравнение $\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2=q_3$, задающее при $q_3>0$ окружность с центром в точке пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $(x_3;\ y_3)$. Пусть d — длина стороны треугольника. Тогда, в обозначениях, принятых нами в приведенном выше **решении 2**, имеем $a^2+b^2+c^2=PA^2+PB^2+PC^2=CA^2+CB^2+CC^2=2d^2$. Поскольку, согласно теореме косинусов $d^2=a^2+b^2+ab$, то $c^2=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$, откуда $a+b=c$.

Тема: «Метод координат. Уравнение окружности».

11. Постройте квадратный трехчлен $p(x)$, такой, что $p(a)=a^4$, $p(b)=b^4$ и $p(c)=c^4$ (здесь a, b и c — различные заданные числа).

Решение 1. Пусть $q(x)=x^4-x(x-a)(x-b)(x-c)$. Ясно, что это — кубический многочлен, такой, что $q(a)=a^4$, $q(b)=b^4$ и $q(c)=c^4$. Его старшим коэффициентом является число $a+b+c$. Поэтому искомым квадратичным многочленом является

$$p(x)=x^4-x(x-a)(x-b)(x-c)-(a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c).$$

Найдем его коэффициенты:

$$\begin{aligned}p(x)&=-x\big(x(ab+bc+ca)-abc\big)-(a+b+c)\big(-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc\big)=\\&=\big((a+b+c)^2-ab-bc-ca\big)x^2-\big((a+b+c)(ab+bc+ca)-abc\big)x+abc(a+b+c)=\\&=\big(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\big)x^2-(a+b)(b+c)(c+a)x+abc(a+b+c).\end{aligned}$$

Решение 2. Пусть $p(x) = Ax^2 + Bx + C$. Тогда

$$\begin{cases} a^2 A + aB + C = a^4, \\ b^2 A + bB + C = b^4, \\ c^2 A + cB + C = c^4. \end{cases}$$

Вычитая третье уравнение из первых двух, получаем систему

$$\begin{cases} (a^2 - c^2)A + (a-c)B = a^4 - c^4, \\ (b^2 - c^2)A + (b-c)B = b^4 - c^4. \end{cases}$$

Поскольку $a \neq c$ и $b \neq c$, то, сократив на $a - c$ и $b - c$, получаем следующую систему

$$\begin{cases} (a+c)A + B = a^3 + a^2c + ac^2 + c^3, \\ (b+c)A + B = b^3 + b^2c + bc^2 + c^3, \end{cases}$$

откуда $(a-b)A = a^3 - b^3 + c(a^2 - b^2) + c^2(a-b)$ и $A = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \quad (a \neq b)$.

Далее имеем: $B = a^3 + a^2c + ac^2 + c^3 - (a+c)A = -(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + 2abc) =$
$= -(a+b)(b+c)(c+a)$.

И, наконец, $C = a^4 - a^2A - aB = a^2bc + ab^2c + abc^2 = abc(a+b+c)$.

Решение 3. Ответом является *интерполяционный многочлен Лагранжа*

$$p(x) = \frac{a^4(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Решение 4. Ответом является *интерполяционный многочлен Ньютона*. Вначале построим линейную функцию $q(x)$, такую, что $q(a) = a^4$ и $q(b) = b^4$. Ясно, что

$$q(x) = a^4 + \frac{b^4 - a^4}{b-a}(x-a) = (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)x - ab(a^2 + ab + b^2).$$

Квадратный трехчлен будем искать в виде $p(x) = q(x) + \alpha(x-a)(x-b)$. Поскольку при любом значении α справедливы равенства $p(a) = q(a) = a^4$ и $p(b) = q(b) = b^4$, то надо подобрать α так, чтобы $p(c) = c^4$. Таким образом, $\alpha = \dfrac{c^4 - q(c)}{(c-a)(c-b)}$.

Далее имеем:

$$\begin{aligned} c^4 - q(c) &= c^4 - a^3c - a^2bc - ab^2c - b^3c + a^3b + a^2b^2 + ab^3 = \\ &= (c-a)(c^3 + ac^2 + a^2c) - a^2b(c-a) - ab^2(c-a) - b^3(c-a) = \\ &= (c-a)(c^3 + ac^2 + a^2c - a^2b - ab^2 - b^3) = \\ &= (c-a)((c-b)(c^2 + bc + b^2) + (c-b)(ab + ac) + a^2(c-b)) = \\ &= (c-a)(c-b)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Поэтому $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$ и, следовательно,

$$p(x) = (a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)(x-a)(x-b) + (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(x-a) + a^4.$$

12. Пусть A, B и C — точки пространства, не лежащие на одной прямой. Обозначим через S площадь треугольника ABC. Докажите, что $S^2 = S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{xz}^2$, где S_{xy}, S_{yz} и S_{xz} — площади проекций треугольника ABC на координатные плоскости Oxy, Oyz и Oxz, соответственно.

Доказательство 1. Не теряя общности можно считать, что вершина A совпадает с началом координат — точкой O. Пусть две другие вершины имеют координаты $B(x_1; y_1; z_1)$ и $C(x_2; y_2; z_2)$.

Воспользовавшись формулой для вычисления скалярного произведения векторов
$$|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos\angle BOC = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$
получаем:
$$4S_{OBC}^2 = OB^2\cdot OC^2\sin^2\angle BOC = OB^2\cdot OC^2 - OB^2\cdot OC^2\cos^2\angle BOC =$$
$$= (x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2) - (x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2 =$$
$$= (x_1y_2-x_2y_1)^2 + (y_1z_2-y_2z_1)^2 + (z_1x_2-z_2x_1)^2. \qquad (*)$$

Проекциями точек B и C на плоскость Oxy являются точки $B_1(x_1;y_1;0)$ и $C_1(x_2;y_2;0)$. Подставив их координаты в найденную формулу, получим, что $2S_{OB_1C_1} = |x_1y_2 - x_2y_1|$. Таким образом, мы нашли площадь проекции треугольника на координатную плоскость Oxy. Аналогичным образом получаем, что удвоенная площадь проекций данного треугольника на координатные плоскости Oyz и Oxz равна соответственно $|y_1z_2 - y_2z_1|$ и $|z_1x_2 - z_2x_1|$.

Таким образом, в правой части формулы $(*)$ стоит учетверенная сумма квадратов площадей проекций данного треугольника на координатные плоскости.

Доказательства 2 и 3. Обозначим через α, β и γ углы, которые плоскость треугольника ABC образует, соответственно, с координатными плоскостями Oyz, Oxz и Oxy. Пусть S — площадь треугольника ABC, а S_{xy}, S_{yz} и S_{xz} — площади его проекций на координатные плоскости Oxy, Oyz и Oxz, соответственно. В силу теоремы о площади проекции плоской фигуры, справедливы следующие равенства $S_{xy} = S\cos\gamma$, $S_{yz} = S\cos\alpha$ и $S_{xz} = S\cos\beta$.

Таким образом, нам достаточно доказать тождество $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, что мы и сделаем двумя различными способами.

Способ 1. Пусть $\overrightarrow{OM}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости треугольника ABC. Углы, которые прямая OM образует с осями координат, равны α, β и γ. Таким образом, вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет координаты $\{\pm\cos\alpha;\pm\cos\beta;\pm\cos\gamma\}$. Но в любом случае сумма их квадратов есть квадрат длины единичного вектора, т.е. равна 1.

Способ 2. Обозначим через P, Q и R точки пересечения плоскости треугольника ABC с осями координат. Пусть H — проекция начала координат на эту плоскость. Имеем, $S_{PQH} = S_{PQO}\cos\gamma = S_{PQR}\cos^2\gamma$. Аналогичным образом, $S_{PRH} = S_{PQR}\cos^2\beta$ и $S_{QRH} = S\cos^2\alpha$. Осталось заметить, что $S_{PQR} = S_{PQH} + S_{PRH} + S_{QRH} = S_{PQR}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$, откуда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.