Уважаемые коллеги!

Вам предлагаются два блока заданий:

№1 – №7. «Математический» (задачи для решения).

№8 – №12. «Методический» (задания, моделирующие работу учителя).

Среди предложенных заданий есть и достаточно трудные; присылайте Ваши решения, даже если Вам не удалось выполнить некоторые из этих заданий. Единственное условие — в работе должны быть представлены задания из обоих блоков.

Желаем успеха! ***Жюри конкурса***

I. Математический блок

1. Выясните, при каких значениях параметра a найдутся вещественные числа x и y, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{2xy+a} = x+y+17$.
2. Решите уравнение $10x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 0$.
3. В ряд выписаны все натуральные числа, меньшие миллиарда, имеющие ровно 13 натуральных делителей (включая единицу и само число). Сколько среди них чисел с четной суммой цифр?
4. Докажите, что при любых $a \geq 2$, $b \geq 2$, $c \geq 2$ справедливо неравенство $\log_{b+c} a^2 + \log_{a+c} b^2 + \log_{a+b} c^2 \geq 3$.
5. Найдите условия на коэффициенты многочлена $x^3 + ax^2 + bx + c$, при выполнении которых этот многочлен имеет три различных действительных корня, являющихся последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.
6. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного семиугольника до произвольной прямой, проходящей через его центр, не зависит от положения этой прямой.
7. Окружность и парабола имеют ровно две общие точки, одна из которых является точкой касания данной параболы и данной окружности. Верно ли, что и вторая общая точка окружности и параболы также является их точкой касания?

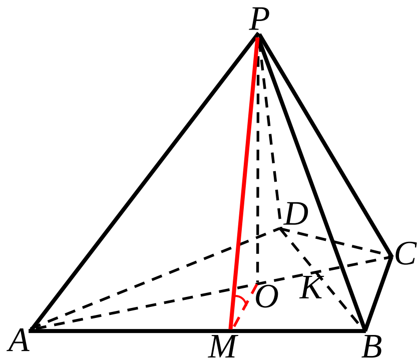
II. Методический блок

А. Ниже приводятся решения двух задач (№№8,9). Оцените каждое из решений и полученные ответы. Укажите все ошибки и недочеты.

8. **Задача.** Найдите объем пирамиды $PABCD$, в основании которой лежит четырехугольник $ABCD$ со сторонами 5, 5, 10 и 10, меньшая диагональ которого равна $4\sqrt{5}$, если известно, что все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°.

   Ответ: $\frac{500}{9}$.

Решение. Пусть O — проекция вершины пирамиды на плоскость основания, а K — точка пересечения диагоналей основания (см. рисунок). Тогда точка O — центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, т.е. суммы противоположных сторон четырехугольника $ABCD$ равны. Примем для определенности $AB = AD = 10$, $BC = CD = 5$. Треугольники ABC и ADC равны и, следовательно, отрезок CK является биссектрисой, медианой и высотой равнобедренного треугольника BCD. Таким образом, диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны и равны $4\sqrt{5}$ и $5\sqrt{5}$, а его площадь S равна $S = \frac{4\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{5}}{2} = 50$.



Радиус r вписанной в основание пирамиды окружности равен $r = \frac{S}{p} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$. Поскольку все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°, то и $PO = \frac{10}{3}$, а, значит, объем V пирамиды $PABCD$ равен $V = \frac{1}{3}\cdot 50\cdot\frac{10}{3} = \frac{500}{9}$.

9. Задача. Докажите, что при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, выполняется неравенство

$$\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) + \sin x > \sin(\sin x) + \operatorname{tg} x$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg} x + \sin x - \sin(\sin x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{tg} x)}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x - \cos(\sin x)\cdot\cos x =$$

$$= \frac{1-\cos^2(\operatorname{tg} x)}{\cos^2(\operatorname{tg} x)\cdot\cos^2 x} + \cos x\left(1-\cos(\sin x)\right) > 0 \text{ при } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, функция $f(x)$ возрастает на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Кроме того, эта функция непрерывна в точке $x = 0$ и $f(0) = 0$. Значит, $f(x) > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Б. Решите задачи №№10,11,12 возможно большим числом способов (различными считаются способы, использующие различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

10. Точка P лежит на дуге AB окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника ABC. Докажите, что $PC = PA + PB$.

11. Постройте квадратный трехчлен $p(x)$, такой, что $p(a) = a^4$, $p(b) = b^4$ и $p(c) = c^4$ (здесь a, b и c — различные заданные числа).

12. Пусть A, B и C — точки пространства, не лежащие на одной прямой. Обозначим через S площадь треугольника ABC. Докажите, что $S^2 = S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{xz}^2$, где S_{xy}, S_{yz} и S_{xz} — площади проекций треугольника ABC на координатные плоскости Oxy, Oyz и Oxz, соответственно.