Решение задач заочного тура 2011

I. Математический блок

Задача 1. Найдите число натуральных корней уравнения $\left[\frac{x}{2010}\right]=\left[\frac{x}{2011}\right]+1$.

Ответ: $2010\cdot 2011$ решений.

Решение задачи 1. Представим число x в виде $x=2011k+d$, где $d=0,1,\ldots,2010$. Тогда правая часть данного уравнения равна $k+1$. Число x будет решением, если для него выполнены неравенства $k+1\le\frac{x}{2010}<k+2$. Подставив в них выражение для x, получим неравенства $2010k+2010\le 2011k+d<2010k+4020$, откуда $2010\le k+d<4020$ или $2010\le k+d\le 4019$. Таким образом, для каждого из 2011 значений d имеются 2010 значений $k=2010-d,\ 2011-d,\ \ldots,4019-d$, таких, что число $x=2011k+d$ является решением данного уравнения, откуда и следует ответ.

Задача 2. Решите уравнение $2\log_3(\operatorname{ctg}x)=\log_2(\cos x)$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Решение задачи 2.

1) $\begin{cases}\cos x>0,\\ \operatorname{ctg}x>0.\end{cases}\qquad (*)$

2) $2\log_3(\operatorname{ctg}x)=\log_2(\cos x)\Leftrightarrow\log_3(\operatorname{ctg}x)=\log_4(\cos x)$.

Пусть $\log_3(\operatorname{ctg}x)=\log_4(\cos x)=t$, тогда $\cos x=4^t$, $\operatorname{ctg}x=3^t$, $\sin x=\left(\frac{4}{3}\right)^t$, откуда $4^{2t}+\left(\frac{4}{3}\right)^{2t}=1$. Так как функция $y=4^{2t}+\left(\frac{4}{3}\right)^{2t}$ — функция возрастающая, то уравнение $4^{2t}+\left(\frac{4}{3}\right)^{2t}=1$ имеет не более одного корня. Подбором находим $t=-\frac{1}{2}$, откуда $\cos x=\frac{1}{2}$ и, с учетом условия $(*)$, окончательно получаем $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Замечание (другое решение задачи 2). Заметим, что $x=\pi/3+2\pi n$ является решением. Докажем, что других решений уравнение не имеет. При помощи стандартных преобразований уравнение приводится к виду $(\cos x)^{1-\log_2\sqrt{3}}=\sin x$. Поскольку $\log_2\sqrt{3}<1$, то в левой части полученного уравнения стоит функция, убывающая на каждом из промежутков $(2\pi n;\pi/2+2\pi n)$, а в его правой части стоит возрастающая на них функция. Следовательно, в каждом из этих промежутков уравнение имеет только одно решение.

Задача 3. Пусть $a>0,\ b>0,\ c>0$ и $a+b+c=1$. Докажите, что $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}$.

Решение задачи 3. Переписав левую часть исходного неравенства в виде $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ac}{b+ac}+\frac{c-ab}{c+ab}=\frac{a+bc-2bc}{a+bc}+\frac{b+ac-2ac}{b+ac}+\frac{c+ab-2ab}{c+ab}$, мы от исходного неравенства переходим к неравенству $4\left(\frac{bc}{a+bc}+\frac{ac}{b+ac}+\frac{ab}{c+ab}\right)\ge 3$. $\qquad(*)$

Поскольку по условию $a+b+c=1$, то $a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c)$. Аналогично, $b+ac=(a+b)(b+c)$ и $c+ab=(a+c)(b+c)$. Избавившись в неравенстве $(*)$ от знаменателей, получаем $4\big(ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\big)\ge 3(a+b)(b+c)(c+a)$, а затем, после раскрытия скобок и приведения подобных членов, приходим к неравенству $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2\ge 6abc$. Разделив обе части последнего неравенства на $abc>0$, получаем верное неравенство $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 6$.

Задача 4. Две непересекающиеся окружности расположены так, что одна из их общих внутренних касательных перпендикулярна одной из их общих внешних касательных. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными и третьей общей касательной данных окружностей, если их радиусы — r_1 и r_2.

Ответ: $S=\frac{r_1r_2(r_1+r_2)}{|r_1-r_2|}$ или $S=\frac{r_1r_2|r_1-r_2|}{r_1+r_2}$.

Решение задачи 4.[*] Заметим, что третья общая касательная данных окружностей может являться либо внешней, либо внутренней общей касательной этих окружностей.

Если $r_1=r_2$ и одна из их общих внутренних касательных окружностей перпендикулярна одной из их общих внешних касательных, то окружности касаются внешним образом и имеют только одну общую внутреннюю касательную, проходящую через точку касания окружностей, и две параллельные общие внешние касательные.

Предположим для определенности, что $r_1>r_2$.

1 случай. Третья общая касательная является внешней касательной.

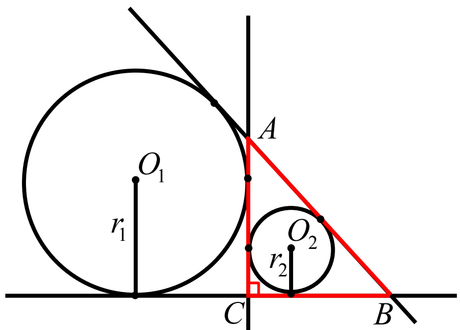


*Рис.*1

Пусть ABC — данный треугольник с прямым углом C (см. рис.1). Обозначим катеты BC и AC этого треугольника через a и b соответственно, гипотенузу AB — через c. Поскольку r_2 — это радиус окружности, вписанной в этот треугольник, а r_1 — радиус его вневписанной окружности, то

$$\begin{cases} a+c-b=\frac{2S}{r_1}, \\ a+b+c=\frac{2S}{r_2}, \end{cases}$$ откуда следует, что $b=S\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$.

С другой стороны, так как треугольник — прямоугольный, то $r_2=\frac{1}{2}(a+b-c)$ и $r_1=\frac{1}{2}(b+c-a)$, откуда $b=r_1+r_2$ и $S=\frac{r_1r_2(r_1+r_2)}{r_1-r_2}$.

2 случай. Третья общая касательная является внутренней касательной.

В этом случае обе данные окружности являются вневписанными для рассматриваемого треугольника (см. рис.2). Поэтому

$$\begin{cases} a+b-c=\frac{2S}{r_1} \\ a+c-b=\frac{2S}{r_2} \end{cases},$$ откуда $a=S\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right)$ и

$$\begin{cases} r_1=\frac{1}{2}(a+b+c) \\ r_2=\frac{1}{2}(b+c-a) \end{cases},$$ откуда $a=r_1-r_2$. Таким образом,

$$S=\frac{r_1r_2(r_1-r_2)}{r_1+r_2}.$$

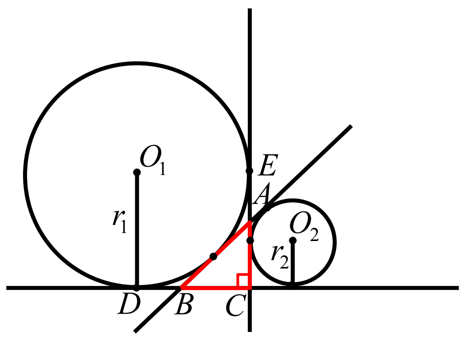


*Рис.*2

---

[*] Для решения задачи 4 использованы следующие известные факты: $S=pr$, $S=(p-a)r_a$, $CD=CE=p$ (см.рис.2). Здесь S — площадь треугольника, $p=\frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной в треугольник окружности, r_a — радиус окружности, вневписанной к стороне a треугольника.

Задача 5. Найдите все натуральные значения n такие, что число n^4+64^n является составным.

Ответ: n — любое натуральное число.

Решение задачи 5. Прежде всего, напомним одно тождество:

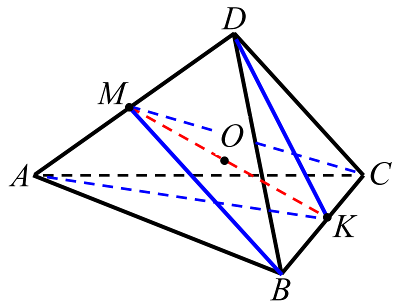
$$x^4+4y^4=\left(x^2+2y^2\right)^2-(2xy)^2=\left(x^2-2xy+2y^2\right)\left(x^2+2xy+2y^2\right)$$

Если x и y — натуральные числа, то, поскольку $x^2-2xy+2y^2=(x-y)^2+y^2$, то это выражение равно 1 только, если $x=y=1$. Следовательно, при всех других натуральных значениях этих переменных число x^4+4y^4 является составным.

Очевидно, что число n^4+64^n может быть простым только, если n – нечетное число. В этом случае $64^n=64\cdot 8^{4k}=4\cdot\left(2\cdot 8^k\right)^4$. Положив $x=n$ и $y=2\cdot 8^k$, мы получим выражение вида x^4+4y^4. Так как в нашем случае $y\geq 2$, то это число – составное.

Задача 6. Сфера касается всех ребер тетраэдра, два противоположных ребра которого равны a и b, а все остальные ребра равны между собой. Найдите радиус этой сферы.

Ответ: $\frac{\sqrt{2ab}}{4}$.



Решение задачи 6. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, в котором $BC=a$, $AD=b$ и $AB=AC=BD=CD=x$. Все ребра тетраэдра касаются сферы, следовательно, суммы противоположных ребер тетраэдра равны, откуда $x=\frac{a+b}{2}$. Обозначим через K и M середины ребер BC и AD соответственно. Плоскости ADK и BMC перпендикулярны ребрам BC и AD соответственно, следовательно, являются плоскостями симметрии тетраэдра, а, значит, центр сферы — точка O, равноудаленная от всех ребер тетраэдра — есть середина общей высоты KM равнобедренных треугольников ADK и BMC. Окончательно получаем:

$$R=MO=\frac{1}{2}\sqrt{MB^2-BK^2}=\frac{1}{2}\sqrt{BD^2-DM^2-BK^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{b^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{2ab}}{4}.$$

Задача 7. Функция $f(x)$ непрерывна и положительна и $f(x+1)=f(x)$ при всех действительных x.

а) Докажите, что $\int\limits_0^1\frac{f(x+0{,}5)}{f(x)}dx\geq 1$.

б) Найдите все значения α такие, что $\int\limits_0^1\frac{f(x+\alpha)}{f(x)}dx\geq 1$.

Решение задачи 7.

$$a)\ \int\limits_0^1\frac{f(x+0{,}5)}{f(x)}dx=\int\limits_0^{0{,}5}\frac{f(x+0{,}5)}{f(x)}dx+\int\limits_{0{,}5}^1\frac{f(x+0{,}5)}{f(x)}dx=\int\limits_0^{0{,}5}\frac{f(x+0{,}5)}{f(x)}dx+\int\limits_0^{0{,}5}\frac{f(u+1)}{f(u+0{,}5)}du=$$

$$=\int\limits_0^{0{,}5}\frac{f(x+0{,}5)}{f(x)}dx+\int\limits_0^{0{,}5}\frac{f(x)}{f(x+0{,}5)}dx\geq\int\limits_0^{0{,}5}2dx=1$$

в силу равенства $f(x-0{,}5)=f(x+0{,}5)$ и неравенства $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

б) **Ответ:** α — произвольное действительное число.

Пусть $\alpha = \frac{1}{n}$, где n — это натуральное число. Запишем интеграл по отрезку $[0;1]$ как сумму интегралов по отрезкам вида $\left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right]$, где $k = 1,2,\ldots,n$, в каждом из которых сделаем замену $u = x - \frac{k-1}{n}$. В результате в каждом из полученных интегралов интегрирование будет идти по отрезку $\left[0;\frac{1}{n}\right]$. В результате мы получим сумму интегралов $\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{f\left(u+\frac{k}{n}\right)}{f\left(u+\frac{k-1}{n}\right)}du = \int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f\left(u+\frac{k}{n}\right)}{f\left(u+\frac{k-1}{n}\right)}du$. Воспользовавшись неравенством Коши, получим, что подынтегральное выражение не меньше, чем $\sqrt[n]{\frac{f\left(u+\frac{1}{n}\right)f\left(u+\frac{2}{n}\right)\ldots f\left(u+\frac{n}{n}\right)}{f(u)f\left(u+\frac{1}{n}\right)\ldots f\left(u+\frac{n-1}{n}\right)}}\cdot n = n$, поскольку $f(u+1) = f(u)$. Таким образом, исходный интеграл не меньше, чем $\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}} n\,dx = 1$.

Если $\alpha = \frac{m}{n}$, то вычисления аналогичны. Опять-таки, в силу того, что $f(x+1) = f(x)$, в числителе дроби будет находиться произведение тех же чисел, что и в ее знаменателе, только в другом порядке, а именно произведение $f\left(u+\frac{m}{n}\right)f\left(u+\frac{m+1}{n}\right)\ldots f\left(u+\frac{n-1}{n}\right)f(u)\ldots f\left(u+\frac{m-1}{m}\right)$, поэтому вновь значение дроби будет равно 1. Для того, чтобы доказать справедливость неравенства при всех действительных значениях α, придется воспользоваться теоремой, не входящей в школьный курс математического анализа, а именно, теоремой Кантора о равномерной непрерывности функции, заданной и непрерывной на данном отрезке.

Обозначим через α_n последовательность рациональных чисел, стремящуюся к числу α. По доказанному, для любого числа их этой последовательности справедливо неравенство $\int\limits_{0}^{1}\frac{f(x+\alpha_n)}{f(x)}dx \geq 1$. Поэтому, если мы докажем, что $\int\limits_{0}^{1}\frac{f(x+\alpha_n)}{f(x)}dx \to \int\limits_{0}^{1}\frac{f(x+\alpha)}{f(x)}dx$, то отсюда и будет следовать требуемое неравенство. Для этого достаточно показать, что для произвольного числа ε для всех достаточно больших номеров n при всех $x \in [0;1]$ справедливо неравенство $\left|\frac{f(x+\alpha_n)}{f(x)} - \frac{f(x+\alpha)}{f(x)}\right| < \varepsilon$, что следует из теоремы Кантора.

II. Методический блок

Задача 8. Решите уравнение $\frac{3}{\log_2 x} = 4x - 5$.

Ответ: $\{2\}$.

Решение. Функция $y = \log_2 x$ — функция возрастающая, значит, $y = \frac{3}{\log_2 x}$ — функция убывающая. С другой стороны, $y = 4x - 5$ — функция возрастающая, следовательно, уравнение $\frac{3}{\log_2 x} = 4x - 5$ имеет не более одного корня. Подбором находим $x = 2$.

Комментарий. Ошибка приведенного решения состоит в том, что из того, что функция $y=\log_2 x$ является возрастающей, следует, что функция $y=\frac{3}{\log_2 x}$ является убывающей на каждом из промежутков ее области определения, т.е. на промежутках $(0;1)$ и $(1;+\infty)$. Следовательно, на каждом из них данное уравнение имеет не более одного решения. Кроме $x=2$ данное уравнение имеет еще решение $x=\frac{1}{2}$.

Задача 9. Из двух групп лыжников общей численностью 100 человек составили сборную команду из 15 человек. Первая группа выделила $p\%$ своего состава, а вторая — 10% своего состава. Сколько всего лыжников в каждой группе?

Ответ: 50 и 50, 20 и 80, 10 и 90.

Решение. Обозначим через x число лыжников в первой группе, а через y — число лыжников во второй группе. Тогда

$$\begin{cases} x+y=100, \\ px+10y=1500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{500}{p-10}, \\ y=\frac{100(p-15)}{p-10}, \end{cases} \text{ где } 15<p<100.$$

Поскольку x — целое число, то $\frac{500}{p-10}$ — также целое число, следовательно, число $p-10$ является делителем 500. Перебором находим ответ:

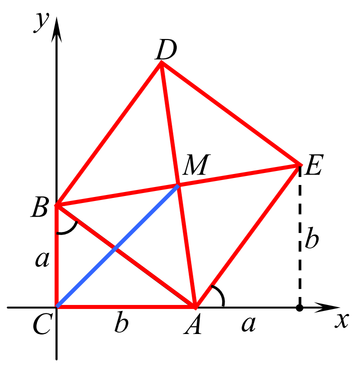
p	**x**	**y**
20	50	50
35	20	80
60	10	90

Комментарий. Ошибка в приведенном решении состоит в том, что по смыслу задачи натуральными являются числа x и px, тогда как число p вполне может быть рациональным. Поэтому ответов в задаче будет больше.

Задача 10. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат $ABDE$ в той полуплоскости, которой не принадлежит треугольник ABC. Найдите расстояние от вершины C прямого угла данного треугольника до центра квадрата, если известно, что $BC=a$, $AC=b$.

Ответ: $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Решения задачи 10.



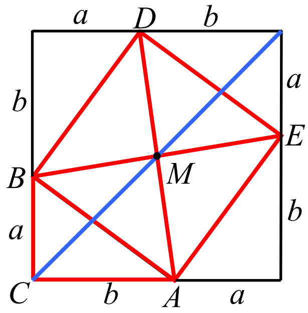
Решение 1. Введем систему координат, начало которой располагается в вершине C прямого угла треугольника. Концы гипотенузы лежат на осях координат: $A(b;0)$ и $B(0;a)$. Точка E — одна из вершин квадрата, построенного на гипотенузе (рисунок), имеет координаты $(a+b;b)$, следовательно, его центр M — середина отрезка BE — имеет своими координатами пару $\left(\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2}\right)$. Значит, $CM=\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Решение 2. Пусть M — точка пересечения диагоналей квадрата $ABDE$. Поскольку $\angle ACB=\angle AMB=90^\circ$, то четырехугольник $ACBM$ — вписанный, и, согласно теореме Птолемея, имеем: $CM\cdot AB=BC\cdot AM+AC\cdot BM=a\cdot\frac{AB}{\sqrt{2}}+b\cdot\frac{AB}{\sqrt{2}}$, откуда $CM=\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Решение 3. Поскольку углы $\angle ACB$ и $\angle AMB$ являются прямыми, то точки M и C лежат на окружности, построенной на гипотенузе AB как на диаметре. Из треугольника ACM находим:

$$MC = 2R\sin\left(\angle BAC + 45^\circ\right) = AB(\sin\angle BAC\cos 45^\circ + \cos\angle BAC\sin 45^\circ) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$



Решение 4. Достроим наш рисунок до рисунка, известного всем по одному из доказательств теоремы Пифагора. Нетрудно доказать, что точка M является центром обоих изображенных на рисунке квадратов. Значит, CM — это половина диагонали большого квадрата, длина которой равна $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Задача 11. Решите уравнение $27^x - 7\sqrt[3]{7\cdot 3^x + 6} = 6$.

Ответ: $\{1\}$.

Решения задачи 11.

Сделав замену $y = 3^x$, получаем в результате уравнение $y^3 - 7\sqrt[3]{7y+6} = 6$.

Решение 1. Положим $z = \sqrt[3]{7y+6}$ и перейдем к системе

$$\begin{cases} y^3 = 7z + 6, \\ z^3 = 7y + 6. \end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим, что $y^3 - z^3 = 7(z-y)$, откуда $y = z$, поскольку $y^2 + yz + z^2 \geq 0$. В результате получаем уравнение $y^3 - 7y - 6 = 0$, корнями которого являются числа $y = -1; -2; 3$. Значит, $3^x = 3$, откуда $x = 1$.

Решение 2. Введем функцию $f(x) = \frac{x^3-6}{7}$. Обратная ей функция $g(x)$ задается формулой $g(x) = \sqrt[3]{7x+6}$. Таким образом, уравнение $y^3 - 7\sqrt[3]{7y+6} = 6$ можно переписать в виде $f(y) = g(y)$, или $f\left(f(y)\right) = y$. Поскольку функция $f(x)$ — возрастающая, то, как известно, решениями уравнения $f\left(f(y)\right) = y$ являются решения уравнения $f(y) = y$. Дальнейшие вычисления такие же, как в предыдущем решении.

Решение 3. Необходимо решить уравнение $y^3 - 7\sqrt[3]{7y+6} - 6 = 0$ при $y > 0$. Заметим, что при $0 < y \leq 2$ решений нет, так как левая часть отрицательна $(y^3 \leq 8,\ 7\sqrt[3]{7y+6} + 6 > 8)$.

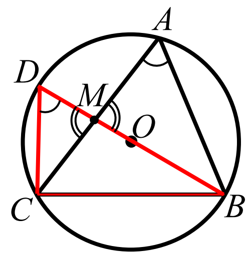
Рассмотрим производную левой части: $\left(y^3 - 7\sqrt[3]{7y+6} - 6\right)' = 3y^2 - \frac{7}{3\sqrt[3]{(7y+6)^2}}$. Ясно, что она положительна при $y > 2$. Значит, функция $f(y) = y^3 - 7\sqrt[3]{7y+6} - 6$ монотонно возрастает на луче $y > 2$, и уравнение имеет на этом луче не более одного корня. Подбором находим: $y = 3$, откуда $x = 1$.

Задача 12. Докажите неравенство $P > 4R$, где P — периметр, а R — радиус описанной окружности остроугольного треугольника.

Решения задачи 12.

Решение 1. Рассмотрим сначала прямоугольный треугольник с гипотенузой $2R$. Ясно, что для него выполнено неравенство $P > 4R$ (т.к. сумма двух катетов больше гипотенузы).

Рассмотрим теперь остроугольный треугольник ABC с периметром P и радиусом описанной окружности R. Опишем около треугольника окружность и впишем в эту окружность прямоугольный треугольник DBC. Согласно условию $\angle ACB < 90°$, следовательно, луч CA пересекает отрезок BD в некоторой точке M (см. рисунок). Нам достаточно доказать, что периметр треугольника ABC больше периметра треугольника DBC или $AB + AC > DB + DC$. $(*)$

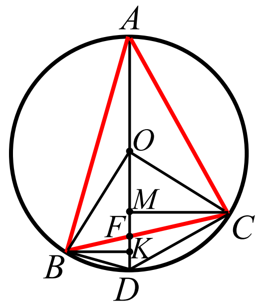


Треугольники DMC и AMB подобны, откуда $\frac{DM}{MA} = \frac{MC}{MB} = \frac{DC}{AB} = k < 1$.

Тогда $(*) \Leftrightarrow AB + AM + MC > DM + MB + DC \Leftrightarrow AB + AM + kMB > kAM + MB + kAB \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-k)AB + (1-k)AM > (1-k)MB \Leftrightarrow AB + AM > MB$, что верно.

Решение 2. Рассмотрим сначала остроугольный треугольник ABC с периметром P и радиусом описанной окружности R, в котором $\angle A \le \angle B < \angle C$. Пусть точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, отрезок AD — диаметр этой окружности, отрезки BK и CM — перпендикуляры, опущенные из точек B и C на AD соответственно. Согласно условию треугольник ABC остроугольный, следовательно, диаметр AD пересекает сторону BC в некоторой точке F (см. рисунок).



Так как $\angle BAD < \angle BAC < \angle ACB$ и $\angle CAD < \angle BAC < \angle ABC$, то $\overset{\frown}{BD} < \overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD} < \overset{\frown}{AC}$. Следовательно, точки K и M — внутренние точки отрезка OD, а, значит, $AK > R$ и $AM > R$. С другой стороны, отрезки BK и CM — катеты прямоугольных треугольников OBK и OCM с гипотенузой, равной R, откуда $BK < R$ и $CM < R$. Таким образом, $BK < AK$ и $CM < AM$.

Отрезок BK — высота прямоугольного треугольника ABD, откуда $BK^2 = AK \cdot KD$ и, поскольку $BK < AK$, то $BK > KD$, а, значит, $AB + BF > AB + BK > AK + KD = 2R$.

Рассматривая треугольник ACD, аналогично получаем $CM^2 = AM \cdot MD$, $CM > MD$, откуда $AC + CF > AC + CM > AM + MD = 2R$.

Таким образом, $P = AB + BC + AC = (AB + BF) + (FC + AC) > 2R + 2R = 4R$.

Заметим теперь, что если $\angle B = \angle C$, то точки F, K и M совпадают, а все приведенные выше рассуждения сохраняют свою силу.

Решения 3 – 4. Так как $P = a + b + c = 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$, где α, β, γ — углы данного треугольника, то нам достаточно доказать, что $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2$.

Доказательство 1.

Рассмотрим график функции $y = \sin x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и хорду с концами $(0;0)$ и $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$. Эта хорда лежит на прямой $y = \frac{2}{\pi}x$. Отсюда ясно, что для любого $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\sin x > \frac{2}{\pi}x$. Осталось сложить почленно три неравенства $\sin\alpha > \frac{2}{\pi}\alpha$, $\sin\beta > \frac{2}{\pi}\beta$, $\sin\gamma > \frac{2}{\pi}\gamma$ и учесть, что $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Доказательство 2.

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right). \qquad (*)$$

Поскольку $\frac{\alpha-\beta}{2} < \frac{\gamma}{2}$, (так как $\alpha < \frac{\pi}{2} < \beta + \gamma$), то $(*) > 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) = 1 + \cos\gamma + \sin\gamma$.

Наконец, $\cos\gamma + \sin\gamma > \cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$.