Уважаемые коллеги!

Вам предлагаются два блока заданий:

№1 – №7. «Математический» (задачи для решения).

№8 – №12. «Методический» (задания, моделирующие работу учителя).

Среди предложенных заданий есть и достаточно трудные; присылайте Ваши решения, даже если Вам не удалось выполнить некоторые из этих заданий. Единственное условие — в работе должны быть представлены задания из обоих блоков.

Желаем успеха! ***Жюри конкурса***

I. Математический блок

1. Найдите число натуральных корней уравнения $\left[\frac{x}{2010}\right]=\left[\frac{x}{2011}\right]+1$.

2. Решите уравнение $2\log_3(\operatorname{ctg} x)=\log_2(\cos x)$.

3. Пусть $a>0,\ b>0,\ c>0$ и $a+b+c=1$. Докажите, что $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}$.

4. Две непересекающиеся окружности расположены так, что одна из их общих внутренних касательных перпендикулярна одной из их общих внешних касательных. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными и третьей общей касательной данных окружностей, если их радиусы — r_1 и r_2.

5. Найдите все натуральные значения n такие, что число n^4+64^n является составным.

6. Сфера касается всех ребер тетраэдра, два противоположных ребра которого равны a и b, а все остальные ребра равны между собой. Найдите радиус этой сферы.

7. Функция $f(x)$ непрерывна и положительна и $f(x+1)=f(x)$ при всех действительных x.

а) Докажите, что $\int\limits_0^1\frac{f(x+0{,}5)}{f(x)}dx\ge 1$.

б) Найдите все значения α такие, что $\int\limits_0^1\frac{f(x+\alpha)}{f(x)}dx\ge 1$.

II. Методический блок

А. Ниже приводятся решения двух задач (№№8,9). Оцените каждое из решений и полученные ответы. Укажите все ошибки и недочеты.

8. Решите уравнение $\frac{3}{\log_2 x} = 4x - 5$.

Ответ: $\{2\}$.

Решение. Функция $y = \log_2 x$ — функция возрастающая, значит, $y = \frac{3}{\log_2 x}$ — функция убывающая. С другой стороны, $y = 4x - 5$ — функция возрастающая, следовательно, уравнение $\frac{3}{\log_2 x} = 4x - 5$ имеет не более одного корня. Подбором находим $x = 2$.

9. Из двух групп лыжников общей численностью 100 человек составили сборную команду из 15 человек. Первая группа выделила $p\%$ своего состава, а вторая — 10% своего состава. Сколько всего лыжников в каждой группе?

Ответ: 50 и 50, 20 и 80, 10 и 90.

Решение. Обозначим через x число лыжников в первой группе, а через y — число лыжников во второй группе. Тогда

$$\begin{cases} x + y = 100, \\ px + 10y = 1500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{500}{p-10}, \\ y = \frac{100(p-15)}{p-10}, \end{cases} \quad \text{где } 15 < p < 100.$$

Поскольку x — целое число, то $\frac{500}{p-10}$ — также целое число, следовательно, число $p-10$ является делителем 500. Перебором находим ответ:

p	**x**	**y**
20	50	50
35	20	80
60	10	90

Б. Решите задачи №№10,11,12 возможно большим числом способов (различными считаются способы, использующие различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

10. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат $ABDE$ в той полуплоскости, которой не принадлежит треугольник ABC. Найдите расстояние от вершины C прямого угла данного треугольника до центра квадрата, если известно, что $BC = a$, $AC = b$.

11. Решите уравнение $27^x - 7\sqrt[3]{7 \cdot 3^x + 6} = 6$.

12. Докажите неравенство $P > 4R$, где P — периметр, а R — радиус описанной окружности остроугольного треугольника.