Решение задач второго (очного) тура третьей олимпиады Эйлера для учителей математики Санкт-Петербурга и Ленинградской области

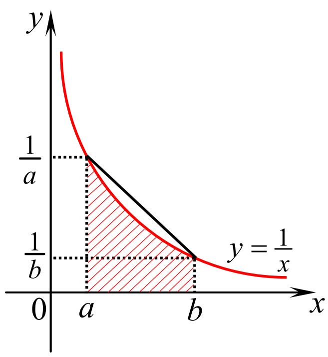
1. Решите уравнение $\frac{1}{x+y+z}=\overline{0,xyz}$ (здесь x, y и z — некоторые цифры).

О т в е т: $\{(1;2;5)\}$.

Решение. Умножив обе части данного уравнения на $1000(x+y+z)$, получаем $\overline{xyz}\cdot(x+y+z)=1000$. Так как $x+y+z<30$, то $\overline{xyz}>30$. Число 1000 имеет только два натуральных двузначных делителя, удовлетворяющих этому условию — 40 и 50. Кроме того, число 1000 имеет ровно пять натуральных трехзначных делителей: 100, 125, 200, 250 и 500. Данному уравнению удовлетворяет только тройка (1; 2; 5).

2. Докажите, что если $0<a<b$, то $2ab\ln\frac{b}{a}<b^2-a^2$.

Доказательство 1. Рассмотрим функцию $y=\frac{1}{x}$ на множестве $(0;+\infty)$. Так как эта функция выпукла вниз, то площадь подграфика этой функции на отрезке $[a;b]$ меньше, чем площадь прямоугольной трапеции с основаниями $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$ и высотой $b-a$ (см. рисунок). Таким образом,



$$\int_a^b \frac{1}{x}dx<\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}(b-a) \quad\Leftrightarrow\quad \ln x\Big|_a^b<\frac{b^2-a^2}{2ab} \quad\Leftrightarrow\quad 2ab\ln\frac{b}{a}<b^2-a^2.$$

Доказательство 2. Разделим обе части неравенства $2ab\ln\frac{b}{a}<b^2-a^2$ $(0<a<b)$ на a^2 и сделаем замену $t=\frac{b}{a}$ ($t>1$ по условию). Тогда неравенство принимает вид $t^2-2t-1>0$ и его требуется доказать при $t>1$.

Пусть $f(t)=t^2-2t\ln t-1$. Тогда $f(1)=0$, $f'(t)=2t-2t\ln t-2$, $f'(1)=0$, $f''(t)=2-\frac{2}{t}$. Так как вторая производная положительна при $t>1$, то первая производная при $t>1$ возрастает. Так как первая производная в точке $t=1$ равна нулю, а при $t>1$ возрастает, то она положительна при $t>1$. Из этого следует, что функция $f(t)$ при $t>1$ возрастает, а, так как $f(1)=0$, то $f(t)$ положительна при $t>1$.

3. Известно, что существуют такие числа $\alpha\neq 0$ и β, что $f(x+\alpha)=f(x)+\beta$ при всех $x\in\mathbb{R}$. Докажите, что функцию $f(x)$ можно представить как сумму линейной функции и периодической функции.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x)=f(x)-\frac{\beta}{\alpha}x$, $x\in\mathbb{R}$.

Так как $g(x+\alpha)=f(x+\alpha)-\frac{\beta}{\alpha}(x+\alpha)=f(x)+\beta-\frac{\beta}{\alpha}x-\beta=f(x)-\frac{\beta}{\alpha}x=g(x)$ для любого $x\in\mathbb{R}$, то функция $g(x)$ является α - периодической. Таким образом, функция $f(x)$ является суммой α - периодической функции $g(x)$ и линейной функции $\frac{\beta}{\alpha}x$.

4. Радиусы вневписанных окружностей некоторого треугольника равны соответственно 2, 3 и 6 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

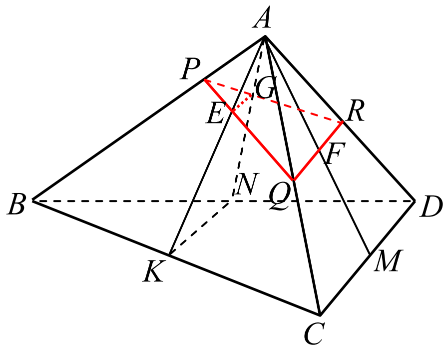
О т в е т: 1 см.

Решение. Пусть a, b и c — длины сторон данного треугольника, S — площадь этого треугольника, p — его полупериметр, а $r_a = 2$, $r_b = 3$, $r_c = 6$ — радиусы его трех вневписанных и вписанной окружностей соответственно. Можно доказать, что для любых трех чисел r_a, r_b, r_c существует, и притом единственный, треугольник, для которого эти числа являются радиусами вневписанных окружностей. Воспользовавшись известными соотношениями $S = pr$, $S = (p-a)r_a$, $S = (p-b)r_b$, $S = (p-c)r_c$, получаем

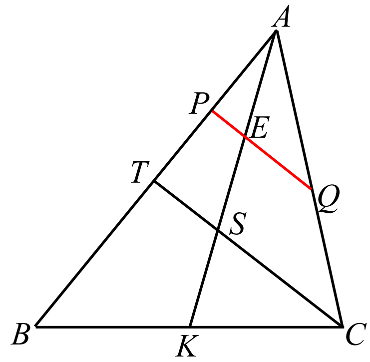
$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-(a+b+c)}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r},\quad r=1.$$

5. Плоскость делит медианы граней ABC, ACD и ABD, выходящие из вершины A, в отношениях 1:2, 1:1 и 1:2 (считая от точки A). Найдите отношение объемов частей, на которые эта плоскость делит данную пирамиду.

Ответ: $1:15$.



Решение. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, AK, AM, AN — медианы его граней ABC, ACD и ABD, выходящие из вершины A, плоскость PQR пересекает эти медианы в точках E, F и G соответственно (см. рисунок). Так как $AE : EK = AG : GN$, то $EG \parallel KN$. В свою очередь, $KN \parallel CD$. Значит, $EG \parallel CD$ и, следовательно, $EG \parallel (ACD)$. Следовательно, плоскость PQR, содержащая прямую EG, пересекает плоскость ACD по прямой QR, параллельной EG, а, значит, $QR \parallel CD$. Поскольку при этом QR проходит через середину F медианы AM, точки Q и R — середины отрезков AC и AD.



Пусть медиана CT треугольника ABC пересекает медиану AK в точке S, а сторону AB в точке T. Тогда $AS = \frac{2}{3}AK$, и так как $AE = \frac{1}{3}AK$, то точка E — середина отрезка AS. Поскольку точка Q — середина AC, точка P — середина отрезка AT и $AP : AB = 1:4$.

Таким образом, ребра данного тетраэдра делятся плоскостью PQR в отношении 1:4, 1:2 и 1:2, следовательно, $\frac{V_{APQR}}{V_{ABCD}} = \frac{AP\cdot AQ\cdot AR}{AB\cdot AC\cdot AD} = \frac{1\cdot1\cdot1}{4\cdot2\cdot2} = \frac{1}{16}$. Значит, $\frac{V_{APQR}}{V_{BCDPQR}} = \frac{1}{15}$.

6. Оцените приведенное ниже решение и полученный ответ. Укажите все ошибки и недочеты.

Найдем множество значений функции $f(x) = x + \frac{2}{x^2}$ *при* $x > 0$.

Решение. *В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел справедливо неравенство*

$$x + \frac{2}{x^2} \ge \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}.$$

Поскольку число x *может быть выбрано сколь угодно большим, то промежуток* $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}; +\infty\right)$ *содержит сколь угодно малые положительные числа, откуда мы и получаем ответ: множеством значений данной функции является луч* $(0; +\infty)$.

Комментарий. Все, что следует из приведенного решения, так это только то, что все значения данной функции при $x > 0$ положительны — что и так очевидно.

Замечание. При том значении x_0, для которого $x_0 = \frac{2}{x_0^2}$, т.е. $x_0 = \sqrt[3]{2}$, значение $f(x_0)$ не является наименьшим значением данной функции.

Возможное решение. В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим трех чисел справедливо неравенство

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{2}{x^2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{2}}.$$

Равенство достигается при $\frac{x}{2} = \frac{2}{x^2}$, т.е. при $x = \sqrt[3]{4}$, и, так как функция $f(x)$ непрерывна и принимает сколь угодно большие значения при $x \to +\infty$, то множеством ее значений является промежуток $\left[f(\sqrt[3]{4}); +\infty\right)$, т.е. промежуток $\left[\frac{3}{\sqrt[3]{2}}; +\infty\right)$.

7. Решите задачу возможно большим числом способов (различными считаются способы, использующие различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

Найдите множество значений функции $f(x) = x - 1 + \sqrt{6x - 3x^2}$.

О т в е т: $[-1; 2]$.

Решение 1. Область определения данной функции — отрезок $[0; 2]$.

$f'(x) = 1 + \frac{3-3x}{\sqrt{6x-3x^2}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6x - 3x^2} = 3x - 3, \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 8x + 3 = 0, \\ 1 \leq x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$;

$f(0) = -1$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$, $f(2) = 1$. Так как данная функция непрерывна, то множеством ее значений является промежуток $[-1; 2]$.

Тема: «*Исследование функции с помощью производной*».

Решение 2. Область определения функции $f(x)$ — отрезок $[0; 2]$. Представим данную функцию в виде $f(x) = x - 1 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2x - x^2}$ и рассмотрим векторы $\vec{a}\{1; \sqrt{3}\}$ и $\vec{b}\{x - 1; \sqrt{2x - x^2}\}$. Их скалярное произведение равно $f(x)$, а длины равны соответственно $|\vec{a}| = 2$ и $|\vec{b}| = 1$. В силу известного неравенства $-|\vec{a}||\vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}||\vec{b}|$ получаем $-2 \leq f(x) \leq 2$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, если $\frac{x-1}{1} = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{3}}$, откуда $x = \frac{3}{2}$ и, так как число $\frac{3}{2} \in [0; 2]$, то наибольшее значение функции $f(x)$ равно $|\vec{a}||\vec{b}| = 2$.

Так как координаты вектора $\vec{a}$ положительны, а одна из координат вектора $\vec{b}$ неотрицательна, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не могут быть противоположно направлены, но нетрудно заметить, что оба слагаемых ($x - 1$ и $\sqrt{6x - 3x^2}$) принимают наименьшее значение на отрезке $[0; 2]$ при $x = 0$. Таким образом, $f(0) = -1$ есть наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[0; 2]$.

Тема: «*Скалярное произведение векторов*».

Решение 3. Перепишем данную функцию в виде $f(x)=x-1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-(x-1)^2}$, где $-1\le x-1\le 1$. Пусть $x-1=\sin\alpha,\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим функцию $g(\alpha)=\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha$, множество значений которой на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ совпадает с множеством значений функции $f(x)$. Так как $g(\alpha)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ и $-\frac{\pi}{6}\le\alpha+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6}$, то множество значений функции $g(\alpha)$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ есть отрезок $[-1;2]$.

Тема: «*Замена переменной. Тригонометрические замены*».

Решение 4. Переформулируем задачу: *Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $f(x)=a$ имеет решение.*

Перепишем уравнение следующим образом:

$$\sqrt{6x-3x^2}=(a+1)-x\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{2x-x^2}=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{a+1}{\sqrt{3}}\qquad (*)$$

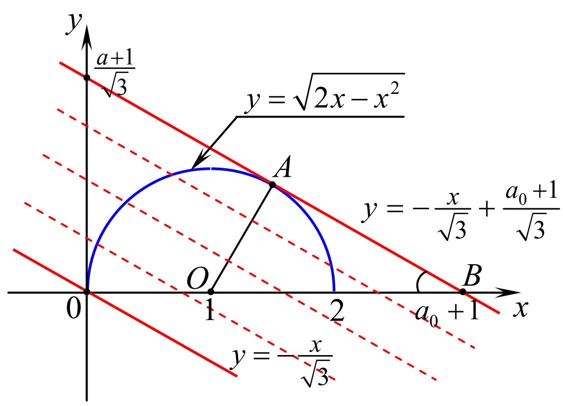
Область определения уравнения (*) — промежуток $[0;2]$, так что, очевидно, $a+1\ge 0$.

Для каждого значения a график функции $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{a+1}{\sqrt{3}}$ — прямая, а график функции $y=\sqrt{2x-x^2}$ — полуокружность с центром в точке $(1;0)$ и радиусом, равным 1.

Действительно:

$$y=\sqrt{2x-x^2}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x^2-2x+y^2=0,\\ y\ge 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}(x-1)^2+y^2=0,\\ y\ge 0.\end{cases}$$

Изобразим график функции $y=\sqrt{2x-x^2}$ и семейство прямых $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{a+1}{\sqrt{3}}$ на координатной плоскости (см. рисунок).



Ясно, что множество искомых значений a — промежуток $[-1;a_0]$, где a_0 — значение a, при котором прямая $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{a+1}{\sqrt{3}}$ является касательной к графику $y=\sqrt{2x-x^2}$. Угловой коэффициент прямой $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{a_0+1}{\sqrt{3}}$ равен $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, значит, $\angle ABO=30^\circ$, и, так как $OA=1$, то $OB=(a_0+1)-1=2$, откуда $a_0=2$.

Тема: «*Уравнение окружности. Задачи с параметром*».