Третья олимпиада Эйлера для учителей математики Санкт-Петербурга и Ленинградской области
Второй (очный) тур — 15 ноября 2009 года

1. Решите уравнение $\dfrac{1}{x+y+z} = \overline{0,xyz}$ (здесь x, y и z — некоторые цифры).

2. Докажите, что если $0 < a < b$, то $2ab \ln \frac{b}{a} < b^2 - a^2$.

3. Известно, что существуют такие числа $\alpha \neq 0$ и β, что $f(x+\alpha) = f(x) + \beta$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что функцию $f(x)$ можно представить как сумму линейной функции и периодической функции.

4. Радиусы вневписанных окружностей некоторого треугольника равны, соответственно, 2, 3 и 6 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

5. Плоскость делит медианы граней ABC, ACD и ABD тетраэдра $ABCD$, выходящие из вершины A, в отношениях $1:2$, $1:1$ и $1:2$ (считая от точки A). Найдите отношение объемов частей, на которые эта плоскость делит данную пирамиду.

6. Оцените приведенное ниже решение и полученный ответ. Укажите все ошибки и недочеты.

Найдем множество значений функции $f(x) = x + \frac{2}{x^2}$ при $x > 0$.

Решение. В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел справедливо неравенство

$$x + \frac{2}{x^2} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}.$$

Поскольку число x может быть выбрано сколь угодно большим, то промежуток $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}; +\infty\right)$ содержит сколь угодно малые положительные числа, откуда мы и получаем ответ: множеством значений данной функции является луч $(0; +\infty)$.

7. Решите задачу возможно бóльшим числом способов (различными считаются способы, использующие разные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из предложенных Вами способов решения в школьном курсе математики.

Найдите множество значений функции $f(x) = x - 1 + \sqrt{6x - 3x^2}$.