Решения задач заочного тура третьей олимпиады Эйлера

1. Решите уравнение $(x+2)(x-4)+4(x-4)\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}=12$.

О т в е т: $\{1+\sqrt{13};\ 1-3\sqrt{5}\}$.

Решение. Найдем область определения уравнения (ОДЗ): $x\le -2;\ x>4$.

Далее, воспользовавшись свойствами арифметического корня, имеем:

а) $\begin{cases} x>4, \\ (x+2)(x-4)+4(x-4)\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4, \\ (x+2)(x-4)+4\sqrt{(x+2)(x-4)}=12. \end{cases}$

Сделав замену $t=\sqrt{(x+2)(x-4)}$, где $t\ge 0$, получаем $\begin{cases} t^2+4t-12=0, \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad t=2$,

откуда $\begin{cases} \sqrt{(x+2)(x-4)}=2, \\ x>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-12=0, \\ x>4 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=1+\sqrt{13}$;

б) $\begin{cases} x\le -2, \\ (x+2)(x-4)+4(x-4)\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -2, \\ (x+2)(x-4)-4\sqrt{(x+2)(x-4)}=12. \end{cases}$

Сделав замену $t=\sqrt{(x+2)(x-4)}$, где $t\ge 0$, получаем $\begin{cases} t^2-4t-12=0 \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad t=6$,

откуда $\begin{cases} \sqrt{(x+2)(x-4)}=6, \\ x\le -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-44=0, \\ x\le -2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=1-3\sqrt{5}$.

2. Докажите неравенство $\mathrm{tg}^6 x+\mathrm{ctg}^6 x\ge 2(\sin^5 x+\cos^5 x+2\sin^3 x\cos^3 x)$.

Решение. Оценим левую и правую части неравенства:

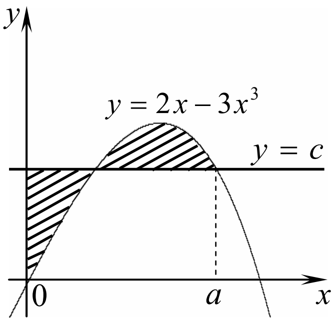
а) Так как $\mathrm{tg}^6 x>0$, $\mathrm{ctg}^6 x>0$ и $\mathrm{ctg}^6 x=\frac{1}{\mathrm{tg}^6 x}$, то $\mathrm{tg}^6 x+\mathrm{ctg}^6 x\ge 2$.

б) С другой стороны $\sin^5 x\le \sin^4 x$, $\cos^5 x\le\cos^4 x$, $2\sin^3 x\cos^3 x\le 2\sin^2 x\cos^2 x$, откуда $2(\sin^5 x+\cos^5 x+2\sin^3 x\cos^3 x)\le 2(\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x)=2(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=2$.

Таким образом, $\mathrm{tg}^6 x+\mathrm{ctg}^6 x\ge 2(\sin^5 x+\cos^5 x+2\sin^3 x\cos^3 x)$.[1)]

[1)] Заметим, что верно и строгое неравенство $\mathrm{tg}^6 x+\mathrm{ctg}^6 x>2(\sin^5 x+\cos^5 x+2\sin^3 x\cos^3 x)$, так как из условия следует, что $\sin x\ne 0$, $\cos x\ne 0$, а, значит, $2(\sin^5 x+\cos^5 x+2\sin^3 x\cos^3 x)<2$.

3. При каком значении c прямая $y = c$ пересекает график функции $y = 2x - 3x^3$ так, что площади заштрихованных фигур (см. рисунок) равны?



О т в е т: $\frac{4}{9}$.

Решение 1.

Пусть a — абсцисса правой точки пересечения графиков $y = 2x - 3x^3$ и $y = c$.

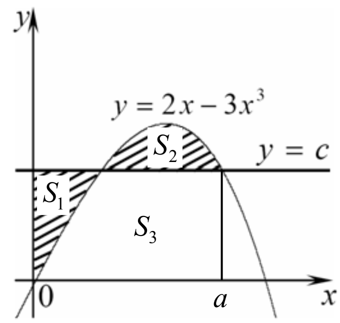
Из условия равенства заштрихованных фигур имеем $\int\limits_0^a \left(2x - 3x^3 - c\right)dx = 0$, откуда

$a^2 - \frac{3a^4}{4} - ac = 0$. Учитывая, что $a > 0$, получаем $c = a - \frac{3a^3}{4}$. (1)

С другой стороны, a — корень уравнения $2x - 3x^3 = c$, то есть $c = 2a - 3a^3$. (2)

Решая совместно уравнения (1) и (2) с учетом условия $a > 0$, получаем $c = \frac{4}{9}$.

Решение 2. Обозначим абсциссу правой точки пересечения графиков буквой a, площади заштрихованных фигур — S_1 и S_2 (см. рисунок). Тогда $c = 2a - 3a^3$. Решим уравнение $S_1 = S_2$:



$$S_1 = S_2 \quad \Leftrightarrow \quad S_1 + S_3 = S_2 + S_3 \quad \Leftrightarrow$$

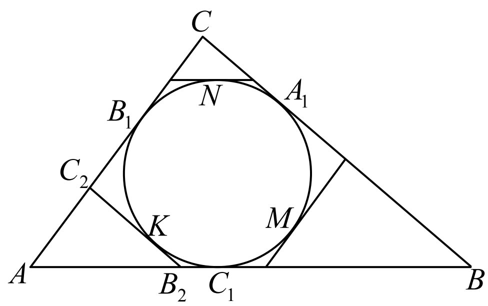
$$\Leftrightarrow \quad a \cdot c = \int\limits_0^a (2x - 3x^3)dx \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2 - 3a^4 = a^2 - \frac{3}{4}a^4 \quad \underset{a>0}{\Leftrightarrow} \quad a = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, $c = 2 \cdot \frac{2}{3} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9}$.

4. Прямые, параллельные сторонам треугольника и касающиеся вписанной в него окружности, отсекают от него три меньших треугольника. Докажите, что сумма площадей отсеченных треугольников не меньше трети площади исходного треугольника.

Решение.

Пусть задан треугольник ABC с площадью S и периметром P. Треугольники, отсекаемые от треугольника ABC прямыми, параллельными его сторонам, подобны данному. Если коэффициенты подобия равны k_1, k_2, k_3, то периметры этих треугольников и их площади равны соответственно $k_1P,\ k_2P,\ k_3P$ и $k_1^2S,\ k_2^2S,\ k_3^2S$.



Требуется доказать, что $k_1^2S + k_2^2S + k_3^2S \ge \frac{1}{3}S$ или $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \ge \frac{1}{3}$.

Так как $AB_1 = AC_1 = \frac{1}{2}P_1 = \frac{1}{2}k_1P$, $BC_1 = BA_1 = \frac{1}{2}k_2P$ и $CA_1 = CB_1 = \frac{1}{2}k_3P$, то $P = AB + BC + CA = AC_1 + C_1B + BA_1 + A_1C + CB_1 + B_1A = k_1P + k_2P + k_3P$ или $k_1 + k_2 + k_3 = 1$.

Воспользовавшись полученным результатом и известным неравенством $\sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{3}} \ge \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3}$, получаем $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \ge \frac{1}{3}$.

5. Сфера касается всех ребер тетраэдра, боковые ребра которого попарно перпендикулярны. Найдите радиус этой сферы, если радиус сферы, описанной вокруг данного тетраэдра, равен $3\sqrt{3}$.

О т в е т: $6(\sqrt{2}-1)$

Решение.

1) Пусть $PABC$ — тетраэдр, боковые ребра PC, PA, PB которого попарно перпендикулярны. Обозначим длины этих ребер через a, b и c соответственно (рис.1). Тетраэдр имеет сферу, касающуюся всех его ребер тогда и только тогда, когда суммы противоположных ребер тетраэдра попарно равны. В нашем случае имеем:

$$a+\sqrt{b^2+c^2}=b+\sqrt{a^2+c^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a-b=\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$(a-b)\left(\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}\right)=a^2-b^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a=b, \\ \sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}=a+b \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad a=b.$$

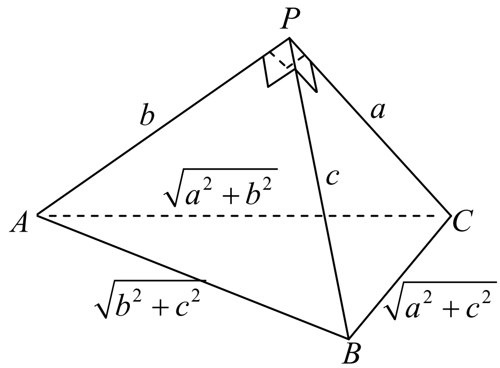


*Рис.*1

(Второе уравнение системы не имеет решений, так как его левая часть больше правой при любых значениях a, b и $c \neq 0$).

Аналогично, получаем $a=c$. Таким образом, тетраэдр $PABC$ — правильная пирамида.

2) Пусть PH — высота пирамиды $PABC$, а CK — высота ее основания ($H \in CK$). Центр сферы O, касающейся всех ребер тетраэдра, есть точка, равноудаленная от этих ребер. Следовательно, $O \in PH$ (рис.2). Так как KH — проекция OK на плоскость ABC, то согласно теореме о трех перпендикулярах $OK \perp AB$. Опустим также перпендикуляр OM на ребро AP. Тогда $OK=OM=r$, где r — радиус сферы, касающейся всех ребер тетраэдра и $AM=AK$, как отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки.

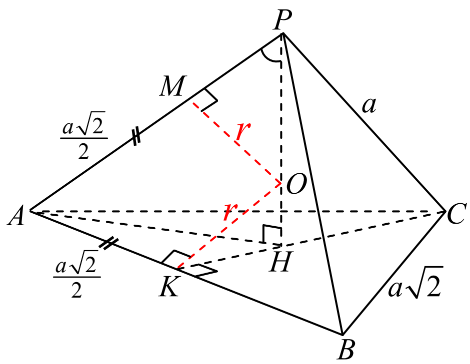


*Рис.*2

Далее находим:

а) ΔABP: $AB=BP\sqrt{2}=a\sqrt{2}$, $AK=\frac{1}{2}AB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$:

б) ΔABC: $AH=\frac{BC}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

в) ΔAPH: $PH=\sqrt{AP^2-AH^2}=\frac{a}{\sqrt{3}}$;

г) $MP=AP-AM=a-\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$;

д) $\Delta OMP \sim \Delta AHP$: $\frac{OM}{AH}=\frac{PM}{PH}$, $OM=a(\sqrt{2}-1)$;

3) Радиус R сферы, описанной вокруг данного тетраэдра, является радиусом сферы, описанной вокруг куба, ребро которого равно боковому ребру a данного тетраэдра (рис.3). Следовательно, $a=\frac{2R}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=6$.

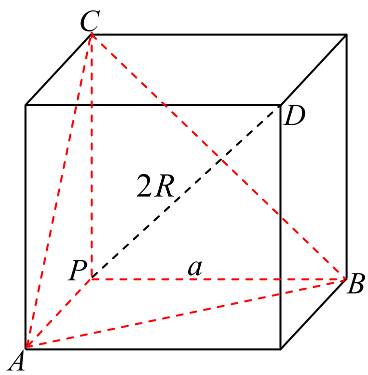


*Рис.*3

Окончательно получаем $r=6(\sqrt{2}-1)$.

6. Пусть множество S — наименьшее из подмножеств множества Z, удовлетворяющих следующим свойствам: 1) $0 \in S$, 2) если $x \in S$, то и $3x \in S$, $3x+1 \in S$. Найдите количество неотрицательных целых чисел из S, не превосходящих 2009.

О т в е т: 128.

Решение 1. Будем строить множество S пошагово. Поскольку $0 \in S$, по второму свойству $1 \in S$. На первом шаге к S добавилось одно число. Поскольку $1 \in S$, то $3 \in S$ и $4 \in S$. На втором шаге добавилось два числа. На третьем шаге добавляется четыре числа: 9, 10, 12 и 13.

Заметим, что различные числа x и y порождают на следующем шаге различные числа, поскольку $x < y \underset{x,y \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} x+1 \le y \Leftrightarrow 3x+1 < 3x+3 = 3(x+1) \le 3y$. Значит, на каждом следующем шаге к множеству S добавляется вдвое больше чисел, чем на предыдущем шаге. Составим таблицу:

Шаг	**Чисел добавилось**	**Минимальное**	**Максимальное**
1	1	1	1
2	2	3	4
3	4	9	13
4	8	27	40
5	16	81	121
6	32	243	364
7	64	729	1093
8	128	2187	3280
...	...	...	...

Видно, что, начиная с 8-го шага, числа из S превосходят 2009. Значит, учитывая 0, всего неотрицательных целых чисел из S, не превосходящих 2009, $1+1+2+4+\ldots+64=128$.

Решение 2. Заметим, что $0 \in S \;\Rightarrow\; 1 \in S$. Будем записывать натуральные числа в троичной системе. В этой системе операция $x \to 3x$ означает приписывание справа 0, а операция $x \to 3x+1$ — приписывание справа 1. В частности, $1 \in S \;\Rightarrow\; 3(=10_3) \in S, 4(=11_3) \in S$. Назовем n-ным шагом $(n \ge 2)$ приписывание справа к каждому числу, полученному на предыдущем шаге, 0 и приписывание 1. Докажем по индукции следующее утверждение. На n-ном шаге в S войдут все n-значные числа, в троичной записи которых участвуют только 0 и 1. Таких n-значных чисел будет 2^{n-1}.

<u>База</u>. Пусть n = 2: $1_3 \to 10_3, 11_3$. Выписаны все 2-значные числа с требуемым свойством, их 2^1 штук. Пусть n = 3: $10_3 \to 100_3, 101_3$; $11_3 \to 110_3, 111_3$. Выписаны все 3-значные числа, в записи которых участвуют только 0 и 1, их 2^2 штук.

<u>Индукционный переход</u>. Пусть выписаны все k-значные числа, в записи которых участвуют только 0 и 1, их 2^{k-1} штук. Припишем к каждому из них 0 и каждому из них 1. Количество чисел удвоится, и будут выписаны все (k+1)-значные числа с требуемым свойством. Утверждение доказано.

Осталось заметить, что $3 \cdot 729 > 2009 > 2 \cdot 729 = 2 \cdot 3^6$. Из этого следует, что в троичной записи 2009 — 7-значное число, у которого первая цифра — 2. А это означает, что наибольшее из чисел, полученных на 7 шаге (1111111_3), меньше, чем 2009.

Итак, количество искомых чисел равно $1+1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=2^7=128$.

7. Известно, что наибольшее число областей, на которые делят плоскость n прямых, равно $\frac{1}{2}n(n+1)+1$. Сформулируйте условия на такой набор прямых и докажите эту формулу. Найдите в общем случае какую-нибудь формулу для числа областей, на которые делят плоскость n прямых.

Решение.

1. Число областей c_n, на которые делят плоскость n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, равно $\frac{1}{2}n(n+1)+1$.

Докажем это утверждение методом математической индукции.
<u>База</u>. Ясно, что $c_1 = 2$.

<u>Индукционный переход</u>. Докажем, что $c_n = \frac{1}{2}n(n+1)+1 \;\Rightarrow\; c_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)+1$. Проведем еще одну прямую, не параллельную ни одной из n данных прямых и не проходящую ни через одну из точек их пересечения. Новая прямая будет иметь n точек пересечения с имеющимися прямыми — по одной с каждой из них. Эти точки разбивают прямую на $n+1$ промежуток, каждый из которых, в свою очередь, разбивает каждую из $n+1$ областей, через которые проходит новая прямая, на две области.

Таким образом $c_{n+1} = c_n + (n+1)$, откуда $c_{n+1} = \frac{1}{2}n(n+1)+1+(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)+1$.

Утверждение доказано.

2. Пусть n прямых пересекаются в m точках и пусть $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — число прямых, проходящих через каждую из этих точек соответственно. Тогда число областей c_n, на которые делят плоскость данные прямые, равно $n+1+\sum_{i=1}^{m}(k_i-1)$, если $m>0$ и равно $n+1$, если $m=0$.

Для $m=0$ утверждение очевидно, так как в этом случае n данных прямых параллельны друг другу.

В случае $m>0$ для доказательства утверждения мысленно проведем прямую l, не параллельную ни одной из данных прямых и расположенную так, что все m точек пересечения n данных прямых лежат по одну сторону от нее. Полуплоскость, не содержащая точек пересечения (назовем ее полуплоскость α) разбивается n прямыми на $n+1$ область. Будем теперь сдвигать прямую l параллельно самой себе в направлении точек пересечения. Изменение количества областей, на которые разбивается полуплоскость α данными прямыми будет происходить только в тот момент, когда прямая l будет проходить через точки пересечения. При этом, если в точке пересечения пересекались k прямых, то число областей увеличится ровно на $k-1$. Таким образом, число областей c_n, на которые делят плоскость данные прямые, равно

$$c_n = n+1+(k_1-1)+(k_2-1)+\ldots+(k_m-1) = n+1+\sum_{i=1}^{m}(k_i-1).$$

Окончательно получаем

$$n+1+\sum_{i=1}^{m}(k_i-1),\ \text{если}\ m>0;\quad n+1,\ \text{если}\ m=0.$$

8. Найдите все значения параметра *a*, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| - x = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что, если пара $(x_0; y_0)$ является решением данной системы, то и пара $(x_0; -y_0)$ также является ее решением. Значит, система имеет единственное решение только в том случае, когда $y_0 = 0$. Далее, из первого уравнения системы находим $x = \pm\sqrt{2}$, а затем из второго — $a = \pm\sqrt{2}$.

О т в е т: $a = \pm\sqrt{2}$.

Комментарий. В приведенном решении допущена логическая ошибка. Условие $y = 0$ является необходимым, но не является достаточным. При проверке найденных значений a выясняется, что одно из них является «посторонним»: при $a = \sqrt{2}$ система имеет три решения: $(0; -\sqrt{2})$; $(0; \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; 0)$.

П р а в и л ь н ы й о т в е т: $a = -\sqrt{2}$.

9. При каком значении параметра *a* величина $|x + y|$, где $(x; y)$ — решение системы

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = -a^2 + 16a - 32, \\ 2xy = a, \end{cases}$$

принимает наибольшее значение?

Решение. $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = -a^2 + 16a - 32, \\ 2xy = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = -a^2 + 16a - 32, \\ 8xy = 4a. \end{cases}$

Складывая почленно уравнения последней системы, получаем $4(x + y)^2 = -a^2 + 20a - 32$, откуда $2|x + y| = \sqrt{-a^2 + 20a - 32}$. Квадратный трехчлен $-a^2 + 20a - 32$ достигает своего наибольшего значения в точке $a_0 = 10$. Число 10 принадлежит области определения выражения $\sqrt{-a^2 + 20a - 32}$. Следовательно, это выражение, а, значит, и величина $|x + y|$ также принимают наибольшее значение при $a = 10$.

О т в е т: $a = 10$.

Комментарий. В приведенном решении допущена ошибка. Уравнение $4(x + y)^2 = -a^2 + 20a - 32$ не равносильно данной системе, а является ее следствием. Нетрудно убедиться, что при $a = 10$ данная система действительных решений не имеет. Для получения правильного ответа достаточно выяснить, при каких значениях a данная система имеет действительные решения. Например, следующим образом:

Данная система имеет решения тогда и только тогда, когда

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

В нашем случае имеем:

$$-a^2 + 16a - 32 \geq 4a \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 12a + 32 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \leq a \leq 8.$$

На промежутке $[4; 8]$ квадратный трехчлен $-a^2 + 20a - 32$ возрастает и достигает своего наибольшего значения (положительного) при $a = 8$.

П р а в и л ь н ы й о т в е т: $a = 8$.

10. Решите уравнение $x^2+\sqrt{x+5}=5$.

О т в е т: $\left\{\frac{1-\sqrt{21}}{2};\ \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right\}$.

Решение 1.

$$x^2+\sqrt{x+5}=5 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+x+\tfrac14=x+5-\sqrt{x+5}+\tfrac14 \quad\Leftrightarrow\quad \left(x+\tfrac12\right)^2=\left(\sqrt{x+5}-\tfrac12\right)^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x+\frac12=\sqrt{x+5}-\frac12, \\ x+\frac12=-\sqrt{x+5}+\frac12 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x+1=\sqrt{x+5}, \\ x=-\sqrt{x+5} \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \\ x=\frac{1-\sqrt{21}}{2}. \end{array}\right.$$

Решение 2.

$$\sqrt{x+5}=5-x^2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x+5=x^4-10x^2+25, \\ 5-x^2\ge 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^4-10x^2-x+20=0, \\ |x|\le\sqrt5 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^4-9x^2+20,25-x^2-x-0,25=0, \\ |x|\le\sqrt5 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (x^2-4,5)^2-(x+0,5)^2=0, \\ |x|\le\sqrt5 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (x^2-x-5)(x^2+x-4)=0, \\ |x|\le\sqrt5 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{1-\sqrt{21}}{2}, \\ x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}. \end{array}\right.$$

Решение 3.

Введем обозначение $y=\sqrt{x+5}$, где $y\ge 0$, и перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+y=5, \\ y^2-x=5. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы ее второе уравнение, получаем:

$$x^2-y^2+x+y=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+y)(x-y+1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} y=-x, \\ y=x+1. \end{array}\right.$$

Решая уравнения $\sqrt{x+5}=-x$ и $\sqrt{x+5}=x+1$, находим $x=\frac{1-\sqrt{21}}{2}$, $x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$.

Решение 4.

Введем обозначение $a=5$ и решим уравнение $x^2+\sqrt{x+a}=a$ относительно a:

$$x^2+\sqrt{x+a}=a \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x+a}=a-x^2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a^2-(2x^2+1)a+(x^4-x)=0, \\ a-x^2\ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=x^2-x, \\ a=x^2+x+1, \end{array}\right. \\ x^2\le a. \end{cases}$$

Подставляя в полученную систему $a=5$, окончательно получаем:

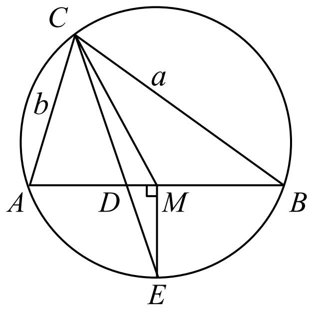
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-x-5=0, \\ x^2+x-4=0, \end{array}\right. \\ |x|\le 5 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{1-\sqrt{21}}{2}, \\ x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}. \end{array}\right.$$

11. Докажите, что в любом треугольнике длина биссектрисы не превосходит длины медианы, проведенной из той же вершины.

Предварительные замечания. Пусть ABC — произвольный треугольник, CM и CD — его медиана и биссектриса соответственно. Введём следующие обозначения: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $CM = m$, $CD = l$, и примем для определенности $b \le a$. Если $b = a$, то $m = l$, т.е. утверждение задачи выполняется. Будем проводить дальнейшие рассуждения в предположении, что $b < a$ (решение 1 и решение 2).

Решение 1.

Биссектриса делит сторону AB в отношении $AD : DB = b : a < 1$, а медиана — в отношении $AM : MB = 1:1$. Значит, $AD < AM$ (см. рисунок). Пусть точка E — точка пересечения прямой CD с окружностью, описанной вокруг треугольника ABC. Поскольку CD — биссектриса вписанного угла C, то точка E делит дугу AB пополам. Значит, перпендикуляр, опущенный из точки E на хорду AB, попадёт в середину AB, т. е., в точку M. Учитывая, что $ME < DE$, получаем



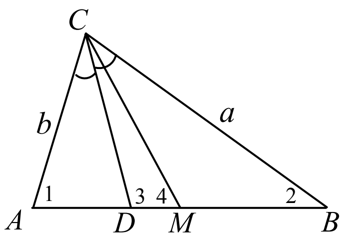
$CD + DE = CE < CM + ME < CM + DE$, откуда $CD < CM$.

Решение 2.

Так как $b < a$, то $\angle 2 < \angle 1$. Далее, поскольку точка M лежит между точками D и B, (см. решение 1), то $\angle BCM < \angle BCD = \angle ACD$.

Имеем: $\angle 4 = \angle BCM + \angle 2 < \angle ACD + \angle 1 = \angle 3$.

Следовательно, $CD < CM$.



Решение 3.

1) Известно, что $m^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$. Так как $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2}$, то

$$m^2 \ge \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4} = p(p-c).$$

2) С другой стороны, $l^2 = \frac{ab\left((a+b)^2 - c^2\right)}{(a+b)^2} = \frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2}$. Так как $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, то $\frac{4ab}{(a+b)^2} \le 1$, следовательно, $l^2 \le p(p-c)$. Таким образом, $l \le \sqrt{p(p-c)} \le m$, т.е $CD \le CM$.

Решение 4.

Известно, что $m^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$, $l^2 = \frac{ab\left((a+b)^2 - c^2\right)}{(a+b)^2}$.

Неравенство $l \le m$ равносильно неравенствам

$$\frac{ab\left((a+b)^2 - c^2\right)}{(a+b)^2} \le \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4},$$

$$4ab(a+b)^2 - 4abc^2 \le 2(a^2+b^2)(a+b)^2 - c^2(a+b)^2,$$

$$c^2(a+b)^2 - 4abc^2 \le 2(a^2+b^2)(a+b)^2 - 4ab(a+b)^2,$$

$$c^2(a-b)^2 \le 2(a+b)^2(a-b)^2.$$

Последнее неравенство верно, так как $c < a + b$ в силу неравенства треугольника.

12. Найдите наименьшее значение выражения $x^4 - 2xy + y^4$.

О т в е т: $-\frac{1}{2}$.

Решение 1.

$$x^4 - 2xy + y^4 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 2x^2y^2 - 2xy + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = (x^2 - y^2)^2 + 2(xy - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{2} \ge -\tfrac{1}{2}.$$

Равенство достигается в том случае, когда оба выражения $x^2 - y^2$ и $(xy - \frac{1}{2})^2$ одновременно обращаются в ноль, т.е., если $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение 2.

Известно, что $x^4 + y^4 \ge 2x^2y^2$. (1)

С другой стороны $2x^2y^2 - 2xy = 2(xy - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} \ge -\frac{1}{2}$. (2)

Таким образом, $x^4 - 2xy + y^4 \ge 2x^2y^2 - 2x^2y^2 = 2(xy - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} \ge -\frac{1}{2}$.

Неравенство (1) обращается в равенство при $|x| = |y|$, а неравенство (2) — при $xy = \frac{1}{2}$. Очевидно, и то и другое выполняется одновременно, если $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение 3.

Сделаем замену $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

С учетом того, что $\cos^4\varphi + \sin^4\varphi = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi = \cos^2 2\varphi + \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi$ получаем:

$$x^4 - 2xy + y^4 = r^4\cos^4\varphi - 2r^2\cos\varphi\sin\varphi + r^4\sin^4\varphi = r^4(\cos^2 2\varphi + \tfrac{1}{2}\sin^2 2\varphi) - r^2\sin 2\varphi =$$

$$= r^4\cos^2 2\varphi + \tfrac{1}{2}(r^4\sin^2 2\varphi - 2r^2\sin 2\varphi + 1) - \tfrac{1}{2} = r^4\cos^2 2\varphi + \tfrac{1}{2}(r^2\sin 2\varphi - 1)^2 - \tfrac{1}{2} \ge -\tfrac{1}{2}.$$

Равенство достигается, если выражения $r^4\cos^2 2\varphi$ и $r^2\sin 2\varphi - 1$ одновременно обращаются в ноль, например, при $r = 1$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

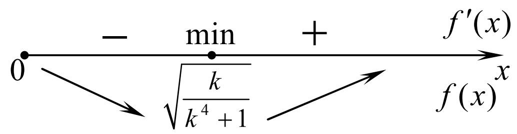
Решение 4.

Сделаем замену $y = kx$ и рассмотрим функцию $f(x) = (k^4+1)x^4 - 2kx^2$. Заметим, что $f(x)$ — четная функция и, следовательно, $\min\limits_{R} f = \min\limits_{[0;+\infty)} f$.

$$f'(x) = 4(k^4+1)x^3 - 4kx = 4x\left((k^4+1)x^2 - k\right).$$

Если $k \le 0$, то $f'(x) \ge 0$ на $[0;+\infty)$, причем $f'(x) = 0$ только при $x = 0$. Значит, в этом случае функция $f(x)$ возрастает на $[0;+\infty)$, и $\min\limits_{[0;+\infty)} f = f(0) = 0$.

Если $k > 0$, то $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x = \sqrt{\frac{k}{k^4+1}}$.



Таким образом,

$$\min_{[0;+\infty)} f = \frac{(k^4+1)k^2}{(k^4+1)^2} - \frac{2k^2}{k^4+1} = -\frac{k^2}{k^4+1} = -\frac{1}{k^2 + \frac{1}{k^2}} \ge -\frac{1}{2}.$$

Равенство достигается при $k = 1$.