Уважаемые коллеги!

Вам предлагаются два блока заданий:

№1 – №7. «Математический» (задачи для решения).

№8 – №12. «Методический» (задания, моделирующие работу учителя).

Среди предложенных заданий есть и достаточно трудные; присылайте Ваши решения, даже если Вам не удалось выполнить некоторые из них. Единственное условие — в работе должны быть представлены задания из обоих блоков.

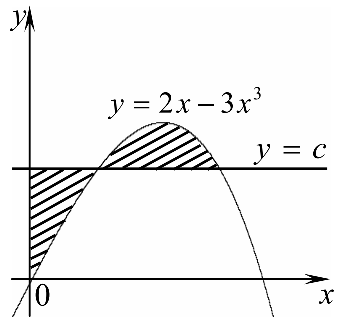
Желаем успеха! *Жюри конкурса*

I. Математический блок

1. Решите уравнение $(x+2)(x-4)+4(x-4)\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}=12$.

2. Докажите неравенство $\operatorname{tg}^6 x+\operatorname{ctg}^6 x \geq 2(\sin^5 x+\cos^5 x+2\sin^3 x\cos^3 x)$.

3. При каком значении c прямая $y=c$ пересекает график функции $y=2x-3x^3$ так, что площади заштрихованных фигур (см. рисунок) равны?



4. Прямые, параллельные сторонам треугольника и касающиеся вписанной в него окружности, отсекают от него три меньших треугольника. Докажите, что сумма площадей отсеченных треугольников не меньше трети площади исходного треугольника.

5. Сфера касается всех ребер тетраэдра, боковые ребра которого попарно перпендикулярны. Найдите радиус этой сферы, если радиус сферы, описанной вокруг данного тетраэдра, равен $3\sqrt{3}$.

6. Пусть множество S — наименьшее из подмножеств множества Z, удовлетворяющих следующим свойствам:

$$1)\ 0\in S,\ \ 2)\ \text{если}\ x\in S,\ \text{то и}\ 3x\in S, 3x+1\in S.$$

Найдите количество неотрицательных целых чисел из S, не превосходящих 2009.

7. Известно, что наибольшее число областей, на которые делят плоскость n прямых, равно $\frac{1}{2}n(n+1)+1$. Сформулируйте условия на такой набор прямых и докажите эту формулу. Найдите в общем случае какую-нибудь формулу для числа областей, на которые делят плоскость n прямых.

II. Методический блок

А. Ниже приводятся решения двух задач (№№8,9). Оцените каждое из решений и полученные ответы. Укажите все ошибки и недочеты.

8. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ |y|-x=a \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что, если пара $(x_0; y_0)$ является решением данной системы, то и пара $(x_0; -y_0)$ также является ее решением. Значит, система имеет единственное решение только в том случае, когда $y_0=0$. Далее, из первого уравнения системы находим $x=\pm\sqrt{2}$, а затем из второго — $a=\pm\sqrt{2}$.

Ответ: $a=\pm\sqrt{2}$.

9. При каком значении параметра a величина $|x+y|$, где $(x;y)$ — решение системы

$$\begin{cases} 4x^2+4y^2=-a^2+16a-32, \\ 2xy=a, \end{cases}$$

принимает наибольшее значение?

Решение. $\begin{cases} 4x^2+4y^2=-a^2+16a-32, \\ 2xy=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+4y^2=-a^2+16a-32, \\ 8xy=4a. \end{cases}$

Складывая почленно уравнения последней системы, получаем $4(x+y)^2=-a^2+20a-32$, откуда $2|x+y|=\sqrt{-a^2+20a-32}$. Квадратный трехчлен $-a^2+20a-32$ достигает своего наибольшего значения в точке $a_0=10$. Число 10 принадлежит области определения выражения $\sqrt{-a^2+20a-32}$. Следовательно, это выражение, а, значит, и величина $|x+y|$ также принимают наибольшее значение при $a=10$.

Ответ: $a=10$.

Б. Решите задачи №№10,11,12 возможно большим числом способов (различными считаются способы, использующие различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

10. Решите уравнение $x^2+\sqrt{x+5}=5$.

11. Докажите, что в любом треугольнике длина биссектрисы не превосходит длины медианы, проведенной из той же вершины.

12. Найдите наименьшее значение выражения $x^4-2xy+y^4$.