Уважаемые коллеги!

Вам предлагаются два блока заданий:

№1 – №7. «Математический» (задачи для решения).

№8 – №12. «Методический» (задания, моделирующие работу учителя).

Среди предложенных заданий есть и достаточно трудные; присылайте Ваши решения, даже если Вам не удалось выполнить некоторые из них. Единственное условие — в работе должны быть представлены задания из обоих блоков.

Желаем успеха! *Жюри конкурса*

I. Математический блок

1. Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ удовлетворяют условию $2a+3b+6c=0$. Докажите, что это уравнение имеет корень на промежутке $(0;1)$.

2. Докажите, что при $0<x<\frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство $2^{\sin x}+2^{\operatorname{tg} x}\geq 2^{x+1}$.

3. Вычислите $\left[\sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+\ldots+\sqrt[2009]{\frac{2009}{2008}}\right]$ (здесь $[x]$ — целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x).

4. Решите в целых числах уравнение $2^x=3^y+1$.

5. Докажите, что $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{n}+\sqrt{n+2}]$ для каждого натурального числа n (здесь $[n]$ — целая часть числа n, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее n).

6. Отрезок делит треугольник на две новые фигуры с равными периметрами и площадями. Докажите, что центр вписанной в треугольник окружности лежит на этом отрезке.

7. Все грани тетраэдра — треугольники, длины сторон которых равны a, b и c. Найдите объем тетраэдра.

II. Методический блок

А. Ниже приводятся решения двух задач (№№8,9). Оцените каждое из решений и полученные ответы. Укажите все ошибки и недочеты.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(a-5+|x+1|)(a-x^2-2x)=0$ имеет ровно два корня.

   Решение. Уравнение $(a-5+|x+1|)(a-x^2-2x)=0$ равносильно совокупности двух уравнений $a-5+|x+1|=0$ и $a-x^2-2x=0$.

Исследуем сначала первое уравнение:
$a-5+|x+1|=0 \quad \Leftrightarrow \quad |x+1|=5-a$. Это уравнение имеет два корня при $a<5$, один корень, $x=-1$, при $a=5$ и не имеет корней при $a>5$.
Выясним теперь, сколько корней имеет уравнение $a-x^2-2x=0$ в зависимости от a:
$a-x^2-2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2x+1=a+1 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2=a+1$.
Очевидно, это уравнение имеет два корня при $a>-1$, один корень, $x=-1$, при $a=-1$ и не имеет корней при $a<-1$.
Таким образом, данное уравнение имеет ровно два корня при $a<-1$ и при $a>5$.

Ответ: $a\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$.

9. Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2+2x}+\sqrt[3]{3x^2+6x-4}=\sqrt[3]{x^2+2x-4}$.

   Решение. Сделаем замену $t=x^2+2x$. Так как $3x^2+6x=3t$, то исходное уравнение принимает вид $\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{3t-4}=\sqrt[3]{t-4}$. Далее имеем:

$$\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{3t-4}=\sqrt[3]{t-4} \quad \Leftrightarrow \quad t+3t-4+3\sqrt[3]{t(3t-4)}(\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{3t-4})=t-4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{t(3t-4)}\cdot\sqrt[3]{t-4}=-t \quad \Leftrightarrow \quad t(3t-4)(t-4)+t^3=0 \quad \Leftrightarrow \quad t(t-2)^2=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t=0, \\ t=2. \end{array}\right.$$

Таким образом, либо $x^2+2x=0$, откуда $x=0,\ x=-2$, либо $x^2+2x-2=0$, откуда $x=-1\pm\sqrt{3}$.

Ответ: $\{-2;\,0;\,-1-\sqrt{3};\,-1+\sqrt{3}\}$.

Б. Решите задачи №№10,11,12 возможно большим числом способов (различными считаются способы, использующие различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

10. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$, если a,b,c — длины сторон треугольника ABC, а R — радиус описанной около этого треугольника окружности.

11. Найдите все значения b такие, что уравнение $a^{2-2x^2}+(b+4)a^{1-x^2}+3b+4=0$ не имеет решений ни при каком $a>1$.

12. Середина каждой стороны основания четырехугольной пирамиды соединена отрезком с точкой пересечения медиан противоположной боковой грани. Докажите, что: а) эти отрезки пересекаются и точкой пересечения делятся в отношении 3:2, считая от стороны основания; б) середины этих отрезков являются вершинами параллелограмма. Найдите отношение площади этого параллелограмма к площади основания пирамиды.